MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II

GABARITO: SUB (10,0 pt) - 18/12/23 -

Prova SUB foi baseada nas P1, P2,P3 cujos gabaritos estavam a disposição. Mais precisamente:

- Questão 1 com Questão 1 P2 e Questão 3 P3.
- Questão 2 com Questão 1 P3,
- Questão 3 com: Questão 2 P1 e Questão 2 P2.

Questão 1 (3,5 pt)**.** Seja $u : \big((0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\big) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função utilidade definada como $u(x) = \sqrt[4]{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt[4]{x_3}$.

(a) Determine a equação do plano tangente a superfície de nível de u (superfície de indiferença) no ponto $p = (1,1,1)$.

(b) Considere $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 20; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ a superfície que descreve um vínculo orçamentário.

(b.1) Esboce o vículo orçamentário S acima, destacando os eixos coordenados.

(b.2) Encontre $q \in S$ tal que $u(q) = \max_{x\in S} u(x)$, ou seja o ponto no vínculo orçamentário que assume a maior utilidade.

Respostas:

(a) $\frac{1}{4}(x_1 - 1) + \frac{2}{4}(x_2 - 1) + \frac{1}{4}(x_3 - 1) = 0$

(b.1) Vide Figura 1

(b.2) $q = (\frac{5}{4}, 5, \frac{5}{4})$

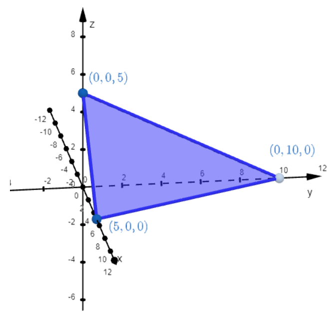

Figura 1: Questão 1

Questão 2 (2,5 pt)**.** Seja $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 + 4)\exp(x_1 - 1)$

(a) Determine o(s) ponto(s) crítico(s) de f.

(b) Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de f (em *sela*, *máximos locais* e/ou *mínimos locais*).

Respostas:

(a) $(0, 0), (2, 0)$

(b)
- $(0, 0)$ é ponto de sela,
- $(2, 0)$ é ponto de mínimo local.

Questão 3 (4,0 pt)**.** Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$g(x) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4}.$$

(a) Determine as 2 retas paralelas a $-x_1 + 2x_2 = 0$ tangentes a curva de nível $C = g^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^2 | g(x) = 1\}$, ou seja determine as 2 retas $-x_1 + 2x_2 = w$ tangentes a C.

(b) Esboce a curva de nível C e as retas obtidas no item (a), destacando os eixos cartesianos.

(c) Determine a curva $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ tal que $\gamma'(t) = -\nabla g \circ \gamma(t)$ e $\gamma(0) = (3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, ou seja a curva com velocidade na direção de maior decrescimento da função g iniciando em $(3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

(d) Esboce a curva γ e as curvas de níveis $g^{-1}(\frac{1}{4})$, $g^{-1}(1)$, e $g^{-1}(4)$ destacando os eixos cartesianos e a orientação de γ, ou seja para onde aponta o vetor velocidade de γ.

Respostas:

(a)
- $-x_1 + 2x_2 = -5$
- $-x_1 + 2x_2 = +5$

(b) Vide Figura 2.

(c) $(x_1(t), x_2(t)) = (3\sqrt{2}\exp(-\frac{2t}{9}), 2\sqrt{2}\exp(-\frac{2t}{4}))$

(d) Vide Figura 3.

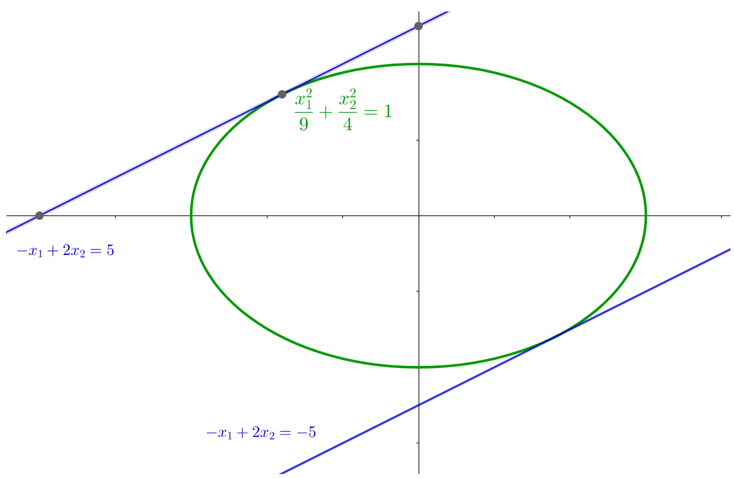

Figura 2: Questão 3 item (b)

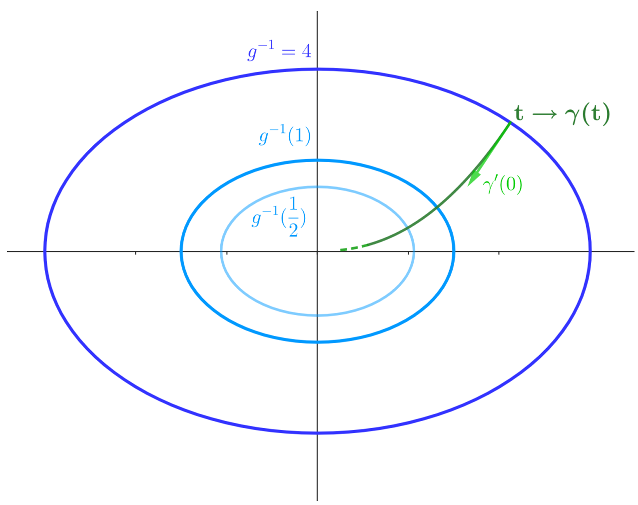

Figura 3: Questão 3 item (d)