2^0 Lista de Exercício de MAT5771 (1^0 semestre 2013)

Esta lista contêm problemas cuja solução poderá ser cobrada em prova. Ela também contêm proposições e teoremas, alguns enunciados e outros **demonstrados em sala de aula** (abreviados aqui por **d.s.a**). A demonstração destes resultados também poderá ser cobrada em prova.

Bibliografia Principal:

1. M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides.
2. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer.
3. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer.
4. R.S. Palais, C-L Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lectures Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag. (see Terng).

Bibliografia de Apoio:

1. R. Bisphop, R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, AMS, Chelsea.
2. C. Gorodski, *Notes on Riemannian Geometry*, Notas de Aula, IME-USP, 2007.
3. W. Kuhnel, *Differential Geometry, Curves-surfaces-manifolds.* American Mathematical Society, Second Edition 2005.
4. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer.
5. M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry,* V. 1 Publish or Perish,Inc. 1979.

1 Imersões isométricas

Problema 1.1. Uma subvariedade Riemanniana M de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é chamada totalmente geodésica, se a segunda forma se anula ao longo de M. Mostre que M é totalmente geodésica se e somente se toda geodésica de M é geodésica de $\tilde{M}$.

Problema 1.2. Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante e $H \subset G$ subgrupo fechado. Mostre que H é subvariedade totalmente geodésica.

Proposição 1.3 (d.s.a)**.** *Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e denote R, $\tilde{R}$ os tensores curvaturas de M e $\tilde{M}$ e B o $(1,2)$ tensor segunda forma de M. Então*

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle - \langle \tilde{R}(X,Y)X,Y\rangle = \langle B(X,X), B(Y,Y)\rangle - \langle B(X,Y), B(X,Y)\rangle$$

Problema 1.4. Mostre que as curvaturas seccionais de $\mathbb{S}^n$ são 1.

Proposição 1.5 (d.s.a). *Seja ξ um campo normal unitário a uma subvariedade Riemanniana M de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Seja $\Psi : V \subset \mathbb{R}^n \to U \subset M$ parametrização com $\overline{U}$ compacto. Considere $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_{M-U} = 0$. Para U^1 compacto com $\overline{U} \subset U^1$ defina $F : (-\delta,\delta)\times U^1 \to \tilde{M}$ como $F(t,x) := \exp_x(t\xi)$ e $\hat{\Psi} : (-\delta,\delta)\times V \to \tilde{M}$ como $\hat{\Psi}(t,x) := F(t\varphi(x),\Psi(x))$. Escolha δ para F ser imersão injetora. Defina $g^t_{i,j} := \langle d\Psi^t e_i, d\Psi^t e_j\rangle$ onde $\Psi^t(x) = \hat{\Psi}(t,x)$. Então:*

$$
\begin{array}{lllll}
(a) & -n\langle H, \varphi\,\xi\rangle & = & \dfrac{\frac{d}{dt}\sqrt{|g^t_{i,j}|}|_{t=0}}{\sqrt{|g^0_{i,j}|}} \\[2ex]
(b) & \frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\Psi^t(V))_{|t=0} & = & -n\int_U \langle H, \varphi\,\xi\rangle\,\omega
\end{array}
$$

onde H é o vetor curvatura média e ω é a forma volume (com orientação induzida por Ψ.)

Proposição 1.6. *Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Seja $\{e_A\}$ um referencial adaptado a M e denote $\tilde{\omega}_{A,B}$ as 1-formas de conexão e $\tilde{\Omega}_{i,j}$ as 2-formas de curvatura de $\tilde{M}$ associadas a $\{e_A\}$. Então*

(a) $d\,\tilde{\omega}_{i,j} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k}\wedge\tilde{\omega}_{k,j} + \sum_\alpha \tilde{\omega}_{i,\alpha}\wedge\tilde{\omega}_{\alpha,j} - \tilde{\Omega}_{i,j}$ é a equação de Gauss escrita no referêncial adaptado.

(b) $d\,\tilde{\omega}_{i,\alpha} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k}\wedge\tilde{\omega}_{k,\alpha} + \sum_\beta \tilde{\omega}_{i,\beta}\wedge\tilde{\omega}_{\beta,\alpha} - \tilde{\Omega}_{i,\alpha}$ é a equação de Codazzi escrita no referêncial adaptado.

(c) $d\,\tilde{\omega}_{\alpha,\beta} = \sum_i \tilde{\omega}_{\alpha,i}\wedge\tilde{\omega}_{i,\beta} + \sum_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha,\gamma}\wedge\tilde{\omega}_{\gamma,\beta} - \tilde{\Omega}_{\alpha,\beta}$ é a equação de Ricci escrita no referêncial adaptado.

Concluimos então que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são partes da equação de curvatura:

$$d\,\tilde{\omega} = \tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}.$$

Teorema 1.7 (d.s.a). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto com métrica Riemanniana g. Considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ referencial ortonormal (em relação a métrica g) definido em U, ω_i as formas duais de $\{e_i\}$ e $\omega_{i\,j}$ as formas de conexão Riemannianas da métrica g em relação ao referencial $\{e_i\}$. Seja A um 2 tensor simétrico definido por $A(X,Y) := \sum_i \omega_{i\,n+1}(X)\otimes\omega_i(Y)$. Defina $\omega_{n+1\,i} := -\omega_{i\,n+1}$ e ω a matriz de 1-formas formada por $\omega_{A,B}$ com A, B variando de 1 a $n+1$. Suponha que ω atende formalmente as equações de Gauss e Codazzi de uma hipersuperfície no espaço Euclidiano, i.e., $d\omega = \omega\wedge\omega$. Então dado $x_0 \in U$, $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e uma base ortonormal $v_1,\ldots,v_{n+1} \in T_{p_0}\mathbb{R}^{n+1}$ existe, para um aberto $\tilde{U} \subset U$ de x_0 suficientemente pequeno, uma única imersão isométrica $\Psi : (\tilde{U}, g) \to (\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ tal que $d\Psi_{x_0}e_i = v_i$ onde $i = 1,\ldots,n$. Além disto $A(X,Y) = \Pi(d\Psi X, d\Psi Y)$, onde Π é a segunda forma da hipersuperfície $M := \Psi(\tilde{U})$ associada ao vetor N normal a M com $N(p_0) = v_{n+1}$.*

Problema 1.8. Exercício 9 do capítulo 8 do livro do Carmo. Dado uma submersão Riemanniana $F : M \to B$ o exercício discute a relação entre a conexão Riemanniana de M e a conexão Riemanniana de B.

Problema 1.9. Exercício 10 do capítulo 8 do livro do Carmo. Dado uma submersão Riemanniana $F : M \to B$ o exercício discute a relação entre a curvatura de $\tilde{M}$ e a curvatura de B.

Problema 1.10. Exercício 12 do capítulo 8 do livro do Carmo. O exercício discute como calcular a curvatura do espaço projetivo complexo.

Problema 1.11. Seja $F : M^{n+k} \to B^k$ uma submersão Riemanniana. Mostre que os itens abaixo são equivalentes.

(a) Para todo $c \in B$, a conexão normal da subvariedade $F^{-1}(c)$ é flat.

(b) A distribuição normal $\mathcal{H}$ é integrável. Em particular, as folhas tangentes a $\mathcal{H}$ são totalmente geodésicas.

Problema 1.12. Considera a ação isométrica $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ definida por $\mu(\lambda, (z_1, z_2)) := (\lambda z_1, \lambda z_2)$. Mostre que a distribuição normal $\mathcal{H}$ as órbitas de μ não é integrável.

1.1 Sugestões

Problema 1.11

Para provar que (a) implica (b) considere $\{e_A\}$ referencial local adaptado a submersão, i.e, e_i $(i = 1, \ldots, n)$ é tangente as pre-imagens e e_α $(\alpha = n + 1, \ldots, n+k)$ é normal projetável. Pelo teorema de Frobenius se $[e_\alpha, e_\beta]_x \in \mathcal{H}_x$ para qualquer $\alpha, \beta > n$ e para qualquer x então $\mathcal{H}$ será integrável, i.e., existe uma folheação $\{\Sigma\}$ cujas folhas são tangentes a distribuição $\mathcal{H}$. Seja ω_i é o dual de e_i. Note que $\mathcal{H} = \cap_{i=1}^n \ker \omega_i$. Assim para mostrar que $\mathcal{H}$ é integrável, basta mostrar que $0 = \omega_i([e_\alpha, e_\beta]) = \langle \nabla_{e_\alpha} e_\beta - \nabla_{e_\beta} e_\alpha, e_i \rangle$ para todo i, α, β.

Por outro lado, usando o fato da conexão normal ser flat, i.e., $\langle \nabla_{e_i} e_\alpha, e_\beta \rangle = 0$ e o fato de e_α ser projetável temos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_\alpha} e_\beta, e_i \rangle &= -\langle e_\beta, \nabla_{e_\alpha} e_i \rangle \\
&= -\langle e_\beta, \nabla_{e_i} e_\alpha + [e_\alpha, e_i] \rangle \\
&= -\langle e_\beta, \nabla_{e_i} e_\alpha \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

De forma analoga temos $\langle \nabla_{e_\beta} e_\alpha, e_i \rangle = 0$ e isto prova que $0 = \omega_i([e_\alpha, e_\beta])$.

Afim de provar que (b) implica (a) considere uma folha Σ tangente a distribuição $\mathcal{H}$. Seja $v \in T_p\Sigma$ e $\alpha(t) := \exp_p(tv)$. O fato de F ser uma submersão Riemanniana implica que a geodésica α é ortogonal a todas as subvariedades $F^{-1}(c)$ que ela encontra. Em particular é sempre tangente a $\mathcal{H}$ e assim deve estar contida em Σ. Em particular note que α também é geodésica de Σ. Assim vemos que Σ é totalmente geodésica. Considere $\{e_A\}$ referencial adaptado a submersão. Como Σ é totalmente geodésica, temos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla_{e_\alpha} e_i, e_\beta \rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i} e_\alpha + [e_\alpha, e_i], e_\beta \rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i} e_\alpha, e_\beta \rangle
\end{aligned}$$

e a última igualdade implica que a conexão normal é flat.

Problema 1.12

Seguindo a notação introduzida no Problema 1.10 considere $N = (1+0\mathbf{i}, 1+0\mathbf{i})$. Então $iN = (0+\mathbf{i}, 0+\mathbf{i})$ é o vetor tangente a órbita que passa pelo ponto N. Considere agora os vetores $\overline{X} = (\frac{1}{\sqrt{2}}+0\mathbf{i}, -\frac{1}{\sqrt{2}}+0\mathbf{i})$ e $\overline{Y} = (0+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}, 0-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i})$. Note que $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são ortogonais a N e assim tangentes a esfera. Por outro lado $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são ortogonais a $\mathbf{i}N$ e assim ortogonais a órbita que passa por N. Por fim note que $\langle \overline{X}, \mathbf{i}\overline{Y}\rangle = -1$. Assim Pelo Problema 1.10 temos que $K(X,Y) = 4$. Como $K(\overline{X}, \overline{Y}) = 1$ segue da fórmula do Problema 1.9 que $[\overline{X}, \overline{Y}]^{\nu}$ é diferente de zero. Assim a distribuição normal $\mathcal{H}$ não é integrável.

2 Variedades completas e o teorema de Hadamard

Teorema 2.1 (d.s.a). *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedade Riemanniana.*

(a) Então as afirmações abaixo são equivalentes

(a.1) Existe $p \in M$ tal que $\exp_p : T_pM \to M$ está bem definida.

(a.2) Os limitados fechados de M são compactos.

(a.3) M é completa como espaço métrico.

(a.4) M é geodesicamente completa, i.e, $\exp_x : T_xM \to M$ está bem definida para todo $x \in M$.

(b) Se M é completa, i.e., uma das afirmações do item (a) é satisfeita, então dado p e q em M existe um segmento de geodésica minimizante ligando p a q.

Problema 2.2. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedade Riemanniana homogênea, i.e, para qualquer $x, y \in M$ existe uma isometria $g \in \mathrm{Iso(M)}$ tal que $g(x) = y$. Mostre que M é completa.

Problema 2.3. Mostre que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são variedades Riemannianas completos.

Problema 2.4. Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Mostre que G é variedade Riemanniana completa.

Problema 2.5. É possivel mostrar que a aplicação exponencial de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ não é sobrejetora. Use este fato para concluir que $SL(2, \mathbb{R})$ não admite métrica bi-invariante.

Proposição 2.6 (d.s.a). *Seja $F : \hat{M} \to M$ uma isometria local sobrejetora. Suponha que $\hat{M}$ é completa. Então F é recobrimento isométrico.*

Lema 2.7 (d.s.a). *Seja M variedade Riemanniana completa com $K \leq 0$. Então para qualquer $p \in M$ a aplicação $\exp_p : T_pM \to M$ é difeomorfismo local.*

Teorema 2.8 (d.s.a). *Seja M variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com $K \leq 0$. Então, para todo $p \in M$, $\exp_p : T_pM \to M$ é difeomorfismos.*

2.1 Sugestões

Problema 2.3: Para mostrar que $\mathbb{H}^n$ é variedade Riemanniana completa, pode-se mostrar que ele é homogeneo (vide e.g. Sec 1.E ou Sec. 3.L do livro de Gallot, Hulin, Lafontaine, ou Teorema 5.2 e Teorema 5.3 Cap 8 do livro do. Carmo).

3 Isometrias e espaços de curvatura constante

Proposição 3.1 (d.s.a). *Sejam* (M, g) *e* $(\hat{M}, g)$ *variedades Riemannianas completas e* $A : T_pM \to T_{\hat{p}}\hat{M}$ *isometria linear. Seja* $B_\epsilon(p)$ *bola normal. Defina* $F : B_\epsilon(p) \to \hat{M}$ *como* $F(x) := \exp_{\hat{p}} \circ A \circ (\exp_p |_{B_\epsilon(0)})^{-1}(x)$. *Para cada* $x \in B_\epsilon(p)$ *defina* $P : T_pM \to T_xM$ *o transporte paralelo ao longa da única geodésica minimizante* γ *com* $\gamma(0) = p$ *e* $\gamma(r) = x$ *e* $\|\gamma'\| = 1$. *Defina* $\hat{\gamma}(t) := \exp_{\hat{p}}(A\gamma'(0))$ *e* $\hat{P} : T_{\hat{p}}\hat{M} \to T_{F(x)}\hat{M}$ *o transporte paralelo ao longo de* $\hat{\gamma}$ *do ponto* $\hat{\gamma}(0)$ *a* $\hat{\gamma}(r) = F(x)$. *Por fim defina* $\phi := PAP^{-1}$. *Suponha que*

$$g(R(X,Y)Z,W) = \hat{g}(\hat{R}(\phi(X),\phi(Y)),\phi(Z),\phi(W))$$

Então F *é isometria local e* $dF_p = A$.

Proposição 3.2 (d.s.a). *Sejam* $F_i : (M, g) \to (\hat{M}, \hat{g})$, *com* $i = 1, 2$ *duas isometrias locais da variedade Riemanniana conexa* M *na variedade Riemanniana* $\hat{M}$. *Suponha que existe* $p \in M$ *tal que* $F_1(p) = F_2(p)$ *e* $d(F_1)_p = d(F_2)_p$. *Então* $F_1 = F_2$.

Teorema 3.3 (d.s.a). *Seja* (M, g) *variedade Riemanniana completa simplesmente conexa com curvaturas seccionais* K *constante iguais a* c. *Então* M *é isométrica a* $M(c)$ *onde* $M(c) = \mathbb{H}^n$ *se* $c = -1$, $M(c) = \mathbb{R}^n$ *se* $c = 0$ *e* $M(c) = \mathbb{S}^n$ *se* $c = 1$.

Teorema 3.4 (d.s.a). *Seja* S *superfície compacta conecta, orientável. Então:*

(a) *S admite métrica com* $K = 1$ *se e somente se* $g(S) = 0$.

(b) *S admite métrica com* $K = 0$ *se e somente se* $g(S) = 1$.

(c) *S admite métrica com* $K = -1$ *se e somente se* $g(S) > 1$.

4 Variação da Energia

Proposição 4.1 (d.s.a). *Sejam (M,g) variedade Riemanniana completa, $p,q \in M$ e $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica minimizante ligando p a q. Então para qualquer curva $\beta : [0,a] \to M$ ligando p a q temos $E(\gamma) \leq E(\beta)$. A desigualdade vale se e somente se β for geodésica minimizante.*

Proposição 4.2 (d.s.a). *Sejam (M,g) variedade Riemanniana completa, $\alpha : [0,a] \to M$ curva suave por partes, $f : (-\epsilon,\epsilon) \times [0,a] \to M$ uma variação de α, $E_f(s)$ a energia da variação, i.e., $E_f(s) := \int_0^a g(\frac{\partial f}{\partial t}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t))\,dt$ e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$. Então*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E_f(s) = \sum_{i=0}^{k} g(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t))|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} - \sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(s,t))dt$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E_f(0) &= \sum_{j=1}^{k} g(V(t_j), \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)) + g(V(a),\alpha'(a)) - g(V(0),\alpha'(0)) \\ &- \sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V(t), \frac{\nabla}{dt}\alpha'(t))dt\end{aligned}$$

Proposição 4.3 (d.s.a). *Seja (M,g) variedade Riemanniana completa. Uma curva diferenciavel por partes $\alpha : [0,a] \to M$ é uma geodésica se e somente se para toda variação própria f de α temos $\frac{d}{dt}E_f(0) = 0$.*

Proposição 4.4 (d.s.a). *Sejam (M,g) variedade Riemanniana completa, $\gamma : [0,a] \to M$ geodésica, $f : (-\epsilon,\epsilon) \times [0,a] \to M$ uma variação de γ, $E_f(s)$ a energia da variação, i.e., $E_f(s) := \int_0^a g(\frac{\partial f}{\partial t}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t))\,dt$ e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$. Então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}E_f(0) &= g(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,a), \gamma'(a)) - g(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0), \gamma'(0)) \\ &+ \sum_{i=0}^{k} g(V(t), \frac{\nabla}{dt}V(t))|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \\ &- \sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V(t), \frac{\nabla^2}{dt^2}V(t)) + g(R(\gamma'(t),V(t))\gamma'(t),V(t))\,dt\end{aligned}$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}E_f(0) &= g(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,a), \gamma'(a)) - g(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0), \gamma'(0)) \\ &+ I_a(V,V)\end{aligned}$$

onde I_a é a forma do índice, i.e.,

$$I_a(V,W) := \int_0^a g(\frac{\nabla}{dt}V(t), \frac{\nabla}{dt}W(t)) - g(R(\gamma'(t),V(t))\gamma'(t),W(t))\,dt$$

Problema 4.5 (d.s.a). Enuncie o teorema de Indice de Morse e conclua que dado uma geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ minimizante, então $\gamma(t)$ não pode ser ponto conjugado a $\gamma(0)$ para $0 < t < a$.

Teorema 4.6 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana completa. Suponha que* $\mathrm{Ric}_p(X) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ *para todo $p \in M$ e todo $X \in T_pM$ com $\|X\| = 1$. Então:*

(a) M é compacta com diametro menor ou igual a πr.

(b) O recobrimento universal de M é compacto e assim $\pi_1(M)$ é finito.

Problema 4.7. Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua algebra de Lie. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ definimos a forma de Killing como

$$\Phi(X, Y) := \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)$$

onde $\mathrm{ad}(X)Y := [X, Y]$. O grupo (algebra de Lie) é chamado semi-simples se Φ é não degenerada. Mostre que se $\mathfrak{g}$ é semi-simples e Φ é negativa definida então $-\Phi$ é metrica bi-invariante. (**Dica** Pode-se usar (sem demonstrar) que $\Phi(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = \Phi(X, Y)$.)

Problema 4.8. Seja G um grupo de Lie que admite métrica bi-invariante. Mostre que $\mathrm{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{4}\Phi(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Em particular conclua que Ric não depende da métrica bi-invariante.

Problema 4.9. Seja G um grupo de Lie conexo semi-simples. Mostre que G é compacto se e somente se a sua forma de Killing é negativa definida.