Gabarito

Lista 3 da MAT 134

Parte 1: Espaços com produto interno

① $< A, B > = 1$; $\|A\| = \sqrt{3}$, $\|B\| = 1$;

Uma base ortogonal para W é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$proj_W \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$ é a matriz

que está mais próximo de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

② $m = 2$

③ para qualquer valor de m

④ basta calcular a $proj_{P_2} e^x$. Lembre que para isso a base de P_2 tem que ser ortogonal.

⑤ Basta ortogonalizar pelo Gram-Schmidt e depois dividir cada vetor pela sua norma.

⑦ $proj_U f(t) = \frac{t}{2}$

⑧ $W^\perp = [t^2 - t + \frac{1}{6}]$

Parte 2 : Transformações lineares

1. a) T não é linear
b) T é linear
c) T é linear
d) T é linear
e) T não é linear
f) T não é linear
g) T é linear

2. a) falso
b) verdadeira, note que Ker T tem ao menos 2 elementos
c) verdadeira
d) falso
e) verdadeira

3. $T(a + bx + cx^2) = ax^4 + \frac{a+b}{2} \cdot 1 + \frac{a-c}{2}(x + x^2)$

4. $\beta_{Ker F} = \{(-1, 1, 0)\}$

$\beta_{Im F} = \{(1, 1, 2), (0, 0\,2)\}$

$Ker(F) \cap Im(F) = \{(0, 0, 0)\}$

$\beta_{Ker(F) + Im(F)} = \beta_{Ker F} \cup \beta_{Im F}$

6. $T(a + bx + cx^2) = \cancel{(3a+b)}, \; (3a - b + c,\ a - b)$

(7) $T^{-1}(ax+b) = -ax + (b-a)$

(8) Para ver que é isomorphismo, calcule $\det M_B(T)$ e veja que é diferente de 0.

Parte 3: Valores próprios, vetores próprios

(1) $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $v_{\lambda_1} = (1+\sqrt{2}, 1)$

$\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $v_{\lambda_2} = (1-\sqrt{2}, 1)$

(2) Suponha que λ é autovalor de T e seja $v \neq \bar{0}$ o autovetor associado. Então basta calcular $T^n(v) = T^{n-1}(T(v)) = \dots = T(T \dots T(v))$
$= \lambda^n v$.

(3) $T^{10}(v) = \left(\frac{1}{2^3} + 3 \cdot 2^{10}, -\frac{1}{2^3} + 3 \cdot 2^{10}\right)$

(4) A é inversível $\Rightarrow \exists A^{-1}$ t.q. $A^{-1}A = I$
$\Rightarrow \lambda \neq 0$ é autovalor de A
Seja $A(v) = \lambda v \Rightarrow A(v) = \lambda I(v)$
$\Rightarrow I(v) = \lambda A^{-1}(v) \Rightarrow A^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v$

(5) $\lambda = \cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta$ são os autovalores de A

(6) a) $\lambda_1 = -1$, $v_{\lambda_1} = (-1,-3,3)$; $\lambda_2 = 2$, $v_{\lambda_2} = (1,0,0)$;
$\lambda_3 = 3$, $v_{\lambda_3} = (5,1,1)$.

b) $\lambda_1 = 2$, $v_{\lambda_1} = (5,-1,2)$; $\lambda_2 = 0$, $v_{\lambda_2} = (0,1,0)$
$\lambda_3 = 0$, $v_{\lambda_3} = (1,0,0)$

(7) a) falsa
b) falsa
c) verdadeiro
d) verdadeiro
e) verdadeiro

(8) $\lambda_1 = 3$, $v_{\lambda_1} = (-1, 1, 0)$;
$\lambda_2 = -1$, $v_{\lambda_2} = (0, 0, 1)$; é diagonalizável
$\lambda_2 = -1$, $v_{\lambda_3} = (1, 1, 0)$. pois $\dim \mathrm{Ker}_{\lambda_2} =$
$=$ multiplicidade algébrica de $\lambda_2 = -1$
em $p_T(\lambda)$.

(9) Verificar multiplicidade algébrica e geométrica para $c = 0$ e $c \neq 0$.

(10) a) Como $A^2 = A$ $\Rightarrow$ para qualquer autovalor λ temos $\lambda^2 - \lambda = 0$

b) A é diagonalizável $\Rightarrow$ existe Base B

t.q. $[A]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = M \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots 0 \end{bmatrix} M^{-1}$

$\Rightarrow [A]_B^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2 = M \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots 0 \end{bmatrix} M^{-1} = A$

11) a) $A^{-1} = A$ seja λ um autovalor de A
$\Rightarrow \lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de $A^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\lambda}$
$\Rightarrow \lambda = \pm 1$; b) semelhante ao item 10 b)

(12) Os autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = c$

i) se $a = c = 1$ $\Rightarrow$ A não é diagonalizável para $\forall b$

ii) se $a \neq c \neq$ $\Rightarrow$ A é diagonalizável $\forall b$

iii) se $a \neq 1$, $c = 1$ A é diagonalizável $\forall b$

iv) se $a \neq 1$, $c \neq 1$ A não é diagonalizável $\forall b$

(13) a) Não é diagonalizável

b) não é diagonalizável

c) é diagonalizável

(14)

$$A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(15) a) $\lambda_1 = 5$ $\quad v_{\lambda_1} = (0, 1, 0)$

$\lambda_2 = 3$ $\quad v_{\lambda_2} = (-5, 0, 4)$ $\qquad M = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 2$ $\quad v_{\lambda_3} = (-1, 0\ 1)$.

b) $\lambda_1 = 3$ $\quad v_{\lambda_1} = (4, 0, 1)$

$\lambda_2 = 2$ $\quad v_{\lambda_2} = (-1, 1, 0)$ $\qquad M = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 1$ $\quad v_{\lambda_3} = (2, 1, 1)$

/ /