GABARITO MAT-134 INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

MONITOR: THIAGO GRANDO

1ª PARTE

01) $S = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(2) = 0 \}$

$$\begin{aligned} \oplus : S \times S &\longrightarrow S \\ (f, g) &\longmapsto f \oplus g \end{aligned} \qquad \text{onde } (f \oplus g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times S &\longrightarrow S \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda \odot f \end{aligned} \qquad \text{onde } (\lambda \odot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para ver que $(S, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial, devemos verificar que:

1°: As operações $\oplus$ e $\odot$ estão bem definidas em S;

2°: A operação $\oplus$ satisfaz os quatro axiomas da soma, de espaço vetorial

3°: A operação $\odot$ satisfaz os quatro axiomas da multiplicação por escalar.

$$S' = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f(2) = 1 \}$$

$(S', \oplus, \odot)$ não é espaço vetorial, porque a soma não está bem definida em S', ou seja, para quaisquer $f, g \in S'$, $f \oplus g(2) \neq 1$.

(02)

$$V = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$(V, \oplus, \odot)$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

a) Não, pois $(\alpha + \beta) \otimes (x, y) \neq \alpha \otimes (x, y) \oplus \beta \otimes (x, y)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in V$.

b) Não, pois $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) \neq (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1)$, para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ com $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

c) Não, pois $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) \neq (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1)$, para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ com $\begin{cases} 2x_1 - 2y_2 \neq 2x_2 - 2y_1 \\ \text{ou} \\ -x_2 + y_1 \neq -x_1 + y_2 \end{cases}$.

d) É espaço vetorial!

03) Aqui V é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

a) É subespaço

b) Não é subespaço, pois não é fechado pela multiplicação por escalar

c) Não é subespaço, ver exercício 5 - (iii) da lista 1.

d) Não é subespaço, porque não é fechado pela multiplicação por escalar.

e) Não é subespaço, pois não é fechado pela multiplicação por escalar

f) Sim é subespaço. Dica: Lembre que, em cálculo, se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $\phi(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ e $\int_a^b \phi(x)\,dx = 0$, então $\phi(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$.

2ª PARTE

01)

a) $(0,0,0)$ é a única solução para o sistema

b) solução básica: $(2,-1,1)$ sol. geral: $(2,-1,1)t$, onde $t \in \mathbb{R}$

c) solução geral: $(-11/4, 23/4, 11/4, 1, 0)r + (-2,6,3,0,1)s$; $r, s \in \mathbb{R}$

02

(i) Não (ii) Não (iii) Sim (iv) Não

03

a) $\beta = \{(-2,1,0,0) ; (5/2, 0, -1/2, 1)\}$ é uma base do espaço de soluções do sistema, assim sua dimensão é 2.

b) $(0,0,0)$ é a única solução do sistema, então o espaço de soluções do sistema não possui base, assim sua dimensão é 0.

04 Para que B seja uma base para o $\mathbb{R}^3$, devemos ter $a \neq 0$ e $a \neq \pm\sqrt{2}$.

05

a) $\beta = \{-2+t ; -4+t^2 ; -8+t^3\}$ é uma base de S, logo $\dim S = 3$.

b) $\beta = \{(3/5, 1, 0) ; (-2/5, 0, 1)\}$ é uma base de S, logo $\dim S = 2$.

c) $\beta = \{1 ; -t+t^2 ; -3t+t^3\}$ é uma base de S, logo $\dim S = 3$

05 (CONTINUAÇÃO)

d) $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5/3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é base de S, logo $\dim S = 3$

e) $\beta = \{(1,0,0,1,1) ; (0,1,0,0,0) ; (0,0,1,0,0)\}$ é base de S, logo $\dim S = 3$

f) $\beta = \{(1,1,0,1) ; (0,0,1,3)\}$ é base de S, logo $\dim S = 2$

g) $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de S, logo $\dim S = 2$.

06 B não é base de $P_3(\mathbb{R})$.

07 $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para o subespaço das simétricas em $M_3(\mathbb{R})$, logo $\dim S = 6 = \dfrac{3^2+3}{2}$.

(08) $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^m \Longrightarrow \{X_1, \ldots, X_k\}$ é L.I em $\mathbb{R}^n$ (6)

<u>Dica</u>; Tome uma combinação linear de $\{X_1, \ldots, X_k\}$ e iguale ao vetor nulo de $\mathbb{R}^n$, $\vec{O}_{\mathbb{R}^n}$.

Multiplique a comb. linear por A pela esquerda e use a hipótese para concluir o exercício.

(09)

a) L.I. b) c) L.I.

(10)

a) L.I. b) L.D. c) L.I.

(11) Imediata.

(12) $\beta = \{(1,1,1,0); (1,1,2,1); (1,0,0,0); (0,1,0,0)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^4$ que contém tais vetores.

(13) Uma base para S é $\beta = \{(0,2,-1,0,1); (0,0,3,-1,2)\}$. (7)

$n = 6$

(14)

a) posto $= 2$

$\beta = \{(-8,-2,1,0); (-11,-4,0,1)\}$ é uma base para o espaço das soluções do sistema homogêneo

dimensão $= 2$

b) posto $= 2$

$\beta = \{(28,-5,1,0); (-27,5,0,1)\}$ é uma base para o espaço das soluções do sistema homogêneo

dimensão $= 2$

(15) Imediata.

3ª PARTE

01 $w = \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$

02 $\langle u, v \rangle = -1$

03, 04 É imediato. Sai diretamente usando as propriedades do produto interno.

05 Note que, para isso acontecer o cosseno do ângulo entre os vetores $\|u\| v + \|v\| u$, u deve ser igual ao cosseno do ângulo entre os vetores $\|u\| v + \|v\| u$, v.

06 Imediato. Verifique que satisfaz as condições da definição de produto interno. Com o produto interno usual $\|u\| = \sqrt{5}$ e com o produto interno definido nesse exercício, $\|u\| = \sqrt{13}$.

07 Uma base ortogonal para S é dada por:

$\beta = \left\{ x - 1 \,;\, x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} \right\}$. Além disso, veja que uma base para $S^{\perp}$ é $\beta^{\perp} = \left\{ x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{10} \right\}$. Para encontrar p_1 e p_2, basta representar f na base

07 (continuação)

$$\left\{ x-1 ;\ x^2-1 ;\ x^2-\frac{4}{5}x+\frac{1}{10} \right\}$$ de $P_2(\mathbb{R})$.

08 Os vetores que pertencem a esse conjunto são da forma $z = u + t \cdot v$, onde $t \in \mathbb{R}$. Calcule a norma de z, usando a relação dada pelo produto interno. Você encontrará uma expressão para $\|z\|$ em função da variável t. Para achar o vetor de menor norma você deve minimizar essa função.

09 Use a definição de produto interno para encontrar as condições para t.

10 $\langle A, B \rangle = 1$; $\|A\| = \sqrt{3}$; $\|B\| = 1$;

Uma base ortonormal para W é:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(10) (continuação)

$$\mathrm{proj}_W \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$ é a matriz que está mais próxima de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(11) $m = 2$

(12) Para qualquer valor de m.

(13) Basta calcular a $\mathrm{proj}_{P_2[0,1]} e^x$. Lembre que para isso você deverá encontrar uma base ortogonal de $P_2[0,1]$.

(14) Basta ortogonalizar utilizando Gram-Schmidt e depois dividir cada vetor pela sua norma.

(15) Imediata.

(16) $\mathrm{proj}_U f(t) = \frac{1}{2} t$.

(17) Para ortogonalizar $\{1, 1+t, 2t^2\}$ usa o processo de Gram-Schmidt. Para normalizar divide cada um dos

17 (continuação)

vetores pelas suas respectivas normas.

$$W = \left[\left\{t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}\right]$$

18, 19, 20 São análogos aos anteriores.