Gabarito da Lista 1 - Introdução à Álgebra Linear - MAT 134/2015

Monitor: Thiago Grando.

1^a **parte**

Exercício 1. Nos ítens abaixo, encontram-se a forma escalonada reduzida da matriz aumentada e a solução do sistema, respectivamente:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $(x_1, x_2, x_3) = (5 - x_3, -9/2 + 5/2x_3, x_3)$, para qualquer $x_3 \in \mathbb{R}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -563/11 & 15/11 \\ 0 & 1 & -36/11 & -5/11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$, não existem soluções para esse sistema

c) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -13 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2x_2 + 13x_5 + 9, x_2, -2, -4x_5 - 2, x_5)$, para quaisquer $x_2, x_5 \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.

a) O sistema de equações não terá solução quando $a \neq 1/2(-3b + c)$ e terá infinitas soluções quando $a = 1/2(-3b + c)$.

b) Se $a \neq 2$ o sistema terá uma única solução. Caso $a = 2$, teremos que analisar dois casos: se $b = -1$, então o sistema terá infinitas soluções. Já no caso em que $b \neq -1$ o sistema não terá solução.

c) Única solução: $a \neq 0$ e $b \neq 2$; Infinitas soluções: $a \neq 0$ e $b = 2$, ou $a = 0$ e $b = 2$; Nenhuma solução: $a = 0$ e $b \neq 2$.

Exercício 3.

As matrizes na forma escalonada de A e A^T são dadas por $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respectivamente. Com isso posto de A e A^T é igual a 2.

Exercício 4.

a) Verdadeiro b) Falso c) Falso d) Falso.

Exercício 5.

Um sistema linear homogêneo sempre terá a solução trivial.

Exercício 6. Nos ítens abaixo, encontam-se, respectivamente, a solução do sistema $AX = 0$, a matriz escalonada U, as matrizes elementares E_i e a matriz M:

a) $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ é a única solução do sistema; $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$; $M = E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$.

b) $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ é a única solução do sistema; $U = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$; $M = E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/8 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ é a única solução do sistema; $U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$; $M = E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ 8/3 & -5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

Exercício 7. Imediata.

Exercício 8. Note que se A é uma matriz $m \times n$ então $posto(A) \leq \min\{m, n\}$

Exercício 9.

a) $m \neq 27/2$

b) para todo m o sistema terá infinitas soluções

2^a **parte**

Exercício 1.

a) $U = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}$

b) $U = \begin{pmatrix} 3/16 & -1/4 & 1/16 \\ 1/16 & -1/12 & 17/48 \\ 1/8 & 1/6 & 1/24 \end{pmatrix}$

Exercício 2.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 7/2 & 11/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

Exercício 3. Se A comuta com C, então $AC = CA$. Como A é inversível, então existe A^{-1} matriz inversa de A. O que acontece se multiplicarmos A^{-1} nessa igualdade?

Exercício 4.

Como $det\,(A) = 1$ para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, então A é inversível.
Se $a = b = c = 0$, então $A^{-1} = A$;

Se $a, b, c \neq 0$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ca - b & -c & 1 \end{pmatrix}$;

Se $a, b \neq 0$ e $c = 0$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Se $b, c \neq 0$ e $a = 0$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$;

Se $a, c \neq 0$ e $b = 0$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ca & -c & 1 \end{pmatrix}$;

Se $a, b = 0$ e $c \neq 0$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$;

Se $b, c = 0$ e $a \neq 0$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Se $a, c = 0$ e $b \neq 0$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 5.

i) Verdadeiro ii) Falso iii) Falso iv) Verdadeiro v) Falso

vi) Verdadeiro vii) Falso viii) Falso ix) Verdadeiro x) Verdadeiro

Exercício 6.

a) $det(A) = 3$, logo A é inversível e sua inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

b) $det(B) = 1$, logo B é inversível e sua inversa é $B^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3^a parte

Exercício 1.

a) $(0, 0, 0)$ b) sol. básica: $(2, -1, 1)$, sol. geral: $(2, -1, 1)t$, onde $t \in \mathbb{R}$

c) sol. geral: $(-11/4, 23/4, 11/4, 1, 0)r + (-2, 6, 3, 0, 1)s$ onde $r, s \in \mathbb{R}$

Exercício 2.

i) Não ii) Não iii) Sim iv) Não.