$$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$$

1). D_f : $x > 0$ (argumento do ln)

$\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

2). $x \neq 0$, se $f(x) = \frac{e^x}{\ln x} = 0$ x não existe

grafico não intersecta OX ou OY

3). limites nos extremos de D_f

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\ln x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{e^x}{\ln x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \underset{L'Hosp^t}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1/x} = +\infty$

$x = 1$ é assintota vertical de $f(x)$

$g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x$

$h(x) = \ln x$ $h'(x) = \frac{1}{x}$

g, h deriváveis em $(0,+\infty)$

$g'(x) \neq 0$ em $(0,+\infty)$

4). $$f'(x) = \frac{e^x \ln x - e^x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x}{(\ln x)^2} \cdot \frac{x \ln x - 1}{x}$$

Temos que determinar sinal de $g(x)$,

$g(x) = x\ln x - 1$ $x \in (0,+\infty)$

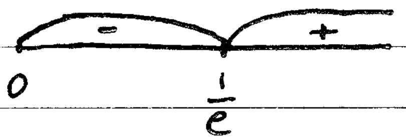
$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x - 1 = +\infty$

e $g(x)$ é contínua em $(0,+\infty)$

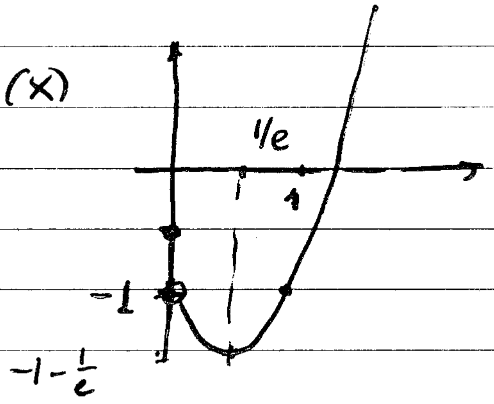
$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x - 1 \underset{L'Hosp}{=} -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ ($\ln x$ e $\frac{1}{x}$ deriváveis e der $\frac{1}{x} \neq 0$ em $(0,1)$)

$g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{e}$



então $g(x) \downarrow$ em $(0, \frac{1}{e})$
e $g(x) \uparrow$ em $(\frac{1}{e}, +\infty)$



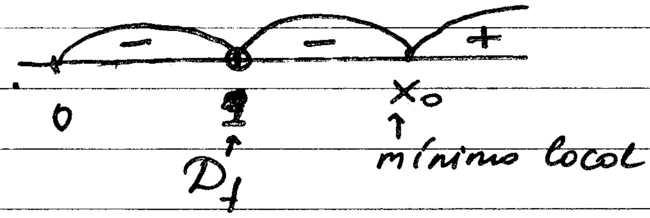
$g(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - 1 = -1 - \frac{1}{e}$

logo em $(\frac{1}{e}, +\infty)$, como g é crescente, existe único raiz de $g(x)$

$g(1) = 1 \ln 1 - 1 = -1$
$g(2) = 2 \ln 2 - 1 \approx 0{,}4$
$g(1{,}5) = 1{,}5 \ln 1{,}5 - 1 \approx -0{,}4$

$x_0 \approx 1{,}75$ é uma raiz de $g(x) = x \ln x - 1$

$f'(x) = \frac{e^x}{(\ln x)^2} \cdot \frac{x \ln x - 1}{x}$



f é crescente em $(x_0, +\infty)$
é decrescente em $(0, 1)$
e em $(1, x_0)$

$f(x_0) \approx 10{,}3$