$$\mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+1\rangle} \simeq \mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+x+4\rangle}$$

Como $\langle x^2+1\rangle$, $\langle x^2+x+4\rangle$ ambos são ideais máximos (pois x^2+1, x^2+x+4 não tem raízes em $\mathbb{Z}_{11}$, logo irredutíveis)

$\mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+1\rangle}$ e $\mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+x+4\rangle}$ ambos são corpos de 121 elementos.

Os elementos de $\mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+1\rangle}$ são dados por restos

$$ax+b+\langle x^2+1\rangle \qquad a,b\in\mathbb{Z}_{11}$$

Analogamente em $\mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+x+4\rangle}$

$$cx+d+\langle x^2+x+4\rangle$$

Queremos construir um homomorfismo

$$\varphi: \mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+1\rangle} \longrightarrow \mathbb{Z}_{11}[x]/_{\langle x^2+x+1\rangle}$$

$$\varphi(1+\langle x^2+1\rangle) = 1+\langle x^2+x+4\rangle$$

e $\varphi(0+\langle x^2+1\rangle) = 0+\langle x^2+x+4\rangle$

e φ respeite soma e produto.

Suponhamos que

$$\varphi(x) = \alpha x+\beta \; (*) \quad (\varphi(x+\langle x^2+1\rangle) = \alpha x+\beta+\langle x^2+x+4\rangle)$$

Então $0+\langle x^2+1\rangle =$

$= x^2+1+\langle x^2+1\rangle$

$\Rightarrow 0 = \varphi(x^2+1+\langle x^2+1\rangle) =$

$= (\varphi(x))^2+1+\langle x^2+x+4\rangle =$

$\overset{(*)}{=} \alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2+1+\langle x^2+x+4\rangle =$

spiral

$= \alpha^2(-x-4) + 2\alpha\beta x + \beta^2 + 1 + \langle x^2+x+4\rangle$
$= (2\alpha\beta - \alpha^2)x + \beta^2 - 4\alpha^2 + 1$

$\begin{cases} 2\alpha\beta - \alpha^2 = 0 \text{ em } \mathbb{Z}_{11} \\ \beta^2 - 4\alpha^2 + 1 = 0 \text{ em } \mathbb{Z}_{11}. \end{cases}$ $\alpha \neq 0$ (φ tem que ser injetora)

$\Rightarrow \begin{cases} 2\beta \equiv \alpha \pmod{11} \\ \beta^2 - 16\beta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\beta \equiv \alpha \pmod{11} \\ -15\beta^2 \equiv -1 \pmod{11} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\beta \equiv \alpha \pmod{11} \\ \beta^2 \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$ $\boxed{\beta = 5}$ ou $\beta = -5$

$\alpha = 10 = -1$

$\varphi(x + \langle x^2+1\rangle) = -x + 5 + \langle x^2+x+4\rangle$

$\varphi(ax+b + \langle x^2+1\rangle) = -ax + 5a + b + \langle x^2+x+4\rangle$

Ex: verificar que define homomorfismo

~~φ é não-~~ $\varphi \neq 0$ então é injetora

(pois $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle$ é corpo)

φ é sobrejetora pois

$\varphi(-ax+5a+b + \langle x^2+1\rangle) = ax+b+\langle x^2+x+4\rangle$

~~$\Rightarrow \varphi$ é bijetora + homomorfismo~~

φ é isomorfismo