$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios MAT 134
Introdução à Álgebra Linear - 2017 - Profa. Iryna Kashuba

$1^{\underline{a}}$ parte: Espaços com produto interno

1. Sendo $V = Mat_2(\mathbb{R})$, mostre que $\langle A, B\rangle =$traço$(B^T A)$ define um produto interno sobre V. Calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Se $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W. Determine o vetor de W que está mais próximo de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Consideremos em P_2 o produto interno dado por

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_1^0 f(t)g(t)dt.$$

   Nessas condições, para que valor de m $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

3. Consideremos em P_2 o produto interno dado por

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_1^{-1} f(t)g(t)dt.$$

   Nessas condições, para que valor de m $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

4. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que está mais próximo da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$, considerando em $C([0, 1])$ o produto interno usual.

5. Ortonormalizar a base $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, pelo processo de Gram-Schmidt.

6. Determinar a projeção ortogonal de $u = (1, 1)$ sobre o subespaço $V = [(1, 3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

7. Determinar a projeção ortogonal de $f(t) = 2t - 1 \in P_2$ sobre o subespaço $U = [t]$, em relação ao produto interno dado por $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)$.

8. Em P_2 com o produto interno definido por $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Ortonormalizar a base $\{1, 1 + t, 2t^2\}$. Achar o complimento orthogonal do subespaço $W = [5, 1 + t]$.

9. Determinar a projeção ortogonal do vetor $(1,1,0,-1) \in \mathbb{R}^4$ sobre subespaço

$$W = \{(x,y,z,t) \,|\, x-y-z=0,\ z-2t=0\}.$$

10. Em cada caso, use o processo de Gram-Schmidt para ortogonalizar a base $\{x^2, x, 1\}$ de P_2. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $p = x^2 - 1$ e $q = \lambda x - 2$ sejam ortogonais em relação aos seguintes produtos internos.

    a). $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

    b). $\langle p, g\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

2ª parte: Transformações Lineares

1. Decida se as seguintes transformações $T : V \to W$ são lineares:

    a). $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

    b). $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$, definida por $T(X) = AX$, para toda matriz fixa $A \in Mat_{5\times 6}$ e todo vetor $X \in \mathbb{R}^6$;

    c). $T : P_n \to P_n$, onde $T(p(x)) = p(x+1)$ para todo polinômio $p(x) \in P_n$;

    d). $T : Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$, onde $T(A) =$*traço*A, $A \in Mat_{n\times n}$;

    e). $T : Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$, onde $T(A) =$*posto*A, $A \in Mat_{n\times n}$;

    f). $T : Mat_{n\times n} \to \mathbb{R}$, onde $T(A) = \det A$, $A \in Mat_{n\times n}$.

    g). $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $T(z) = \bar{z}$, onde z denota o conjugado do número complpexo z.

2. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Em cada caso prove a afirmação ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

    a). Se dim$V = 4$, dim$W = 3$, então T é injetora;

    b). Se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é uma base de V e $T(e_2) = 0 = T(e_4)$, então dim$Im\,T \leq 2$;

    c). Se T for injetora, então dim$V \leq$dim$W$;

    d). Se dim$V \geq$ dim W, então T é sobrejetora;

    e). Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for sobrejetora, então dim$Ker(T) = m - n$.

3. Seja $T : P_2 \to P_4$ tal que $T(1) = x^4$, $T(x + x^2) = 1$, $T(x - x^2) = x + x^3$. Determine $T(a + bx + cx^2)$.

4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $F(0,1,0) = (1,1,2)$, $F(0,0,1) = (0,0,2)$, $F(0,1,0) = (1,1,2)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais: $Ker(F)$, $Im(F)$ e $Ker(F) + Im(F)$.

5. Sejam F, G operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x,y,z) = (x, 2y, y-z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e tais que a matriz do operador $2F - G$ em relação à base $B = \{(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$ seja
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
ache a matriz que representa o operador $F^2 + G^2$ com respeito às bases B e $C = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$.

6. Determine a ação de $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ dada a matriz $M_{DB}(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, B base canônica de P_2 e $D = \{(1,1),(1,0)\}$.

7. Mostre que $T : P_1 \to P_1$, $T(ax+b) = (b-a) - ax$ é isomorfismo e dê uma fórmula para a ação de T^{-1}.

8. Seja $T : P_n \to P_n$ definido por $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$, onde p' indica a derivada de p. Mostre que T é um isomorfismo considerando a matriz $M_B(T)$, onde $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$.

$3^{\underline{a}}$ parte: Valores próprios e vetores próprios

1. Achar os valores e os vetores próprios do operados T do $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x+y, x-y)$.

2. Provar que se λ é valor próprio de T, então λ^n é valor próprio de T^n. Generalizando, se $p(t)$ é um polinômio então $p(\lambda)$ é valor próprio de $p(T)$, onde $p(T) = a_0 Id + a_1 T + \ldots + a_n T^n$ se $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com vetores próprios $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (1,1)$ correspondendo respectivamente aos valores próprios $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5,1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

4. Seja A uma matriz inversível. Se λ é valor próprio de A, mostre que $\lambda \neq 0$ e que $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio de A^{-1}. Mostre que todo autovalor de $\mu \in A^{-1}$ tem a forma $\mu = \frac{1}{\lambda}$, onde λ é algum valor próprio de A.

5. Encontre os valores próprios de

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

6. Achar os valores e os vetores prórpios de operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:

   a). $T(1,0,0) = (2,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,2)$ e $T(0,0,1) = (3,2,1)$;

   b). $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$, $T(0,0,1) = (5,-1,2)$.

7. Em cada caso, ou mostre que a sentença é verdadeira ou dê exemplo mostrando que ela é falsa:

   a). Se A possui valores próprios reais, então ela é diagonalizavel;

   b). Se A é diagonalizavel, então ela possui valores próprios distintos;

   c). Se A é diagonalizavel, então sua transposta A^T também é diagonalizavel;

   d). Se A não tem inversa, então $\lambda = 0$ é valor próprio de A;

   e). $A \sim B$, logo det$A$ =det$B$.

8. Sendo $B = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ e $C = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Encontre os vetores e valores próprios de T. É T diagonalizável?

9. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é não diagonalizável a menos que $c = 0$.

10. a). Se $A^2 = A$ e λ é valor próprio de A, mostre que $\lambda = 0, 1$.

    b). Se A é diagonalizável e todos autovalores são 0 ou 1, mostre que $A^2 = A$.

11. a). Se $A^{-1} = A$ e λ é valor próprio de A, mostre que $\lambda = \pm 1$.

    b). Se A é diagonalizável e todos autovalores são -1 ou 1, mostre que $A^{-1} = A$.

12. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine todos os valores de a, b e c para os quais A é diagonalizável.

7. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico indicado por $P_T(t)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

   a). $p_T(t) = t^4 - 1$

   b). $p_T(t) = t^3(t+1)$ e $\dim Ker(T) = 2$.

   (a) $p_T(t) = t^2(t^2 - 4)$ e $\dim Ker(T) = 2$.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{20}. Ache matrizes D e P tais que D é diagonal e $P^{-1}AP = D$.

9. Em cada caso, encontre o polinômio caracteristico, valores e vetores próprios e, se possível, encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal

a). $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, b). $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$