2^a Lista de Exercícios de Anéis e Corpos - MAT0264

1^a parte: Homomorfismos de anéis

1. Sejam R e S anéis comutativos com unidade. Se ϕ é um homomorfismo de R sobre S e se característica de R é não nula, prove que a característica de S divide característica de R.

2. Sejam M e N ideais de um anel R.
   a) Mostre que N é ideal de $M + N$
   b) Mostre que $M \cap N$ é ideal de M.
   c) Mostre que $(M + N)/N$ é isomorfo a $M/(M \cap N)$.

3. Sejam $D_1 = \{a + 2bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ e $D_2 = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$. Mostrar que D_1 e D_2 são domínios de integridade e descrever os corpos de frações.

2^a parte: Anéis de Polinômios

1. Encontre o mdc e o mmc dos seguintes polinômios, sobre o corpo $\mathbb{Q}$:
   (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 4$ e $g(x) = x^5 - 6x + 1$
   (b) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^6 + x^3 + x + 1$

2. Mostre que:
   (a) $x^2 + x + 1$ é irredutível em $\mathbb{Z}_2[x]$;
   (b) $x^2 + 1$ é irredutível em $\mathbb{Z}_7[x]$;
   (c) $x^3 - 9$ é irredutível em $\mathbb{Z}_{31}[x]$;
   (d) $x^3 - 9$ é redutível em $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

3. a) Mostre que $x^2 + 1$ é irredutível em $\mathbb{Z}_{11}[x]$ e prove diretamente que $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ é um corpo, com 121 elementos.

   b) Mostre que $x^2 + x + 4$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_{11}$ e prove diretamente que $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 + x + 4\rangle$ é um corpo com 121 elementos.

   c) Os corpos $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ e $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 + x + 4\rangle$ são isomorfos? Justifique.

4. Mostre que $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle \simeq \mathbb{C}$.

5. Seja $f \in \mathbb{Q}[x]$, $f \neq 0$. Mostre que f é divisível pelo quadrado de um polinômio se e só se $\mathrm{mdc}(f, f') \neq 1$.

6. Se $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_p$, (p primo), de grau n. Mostre que $\mathbb{Z}_p[x]/\langle f\rangle$ é um corpo com p^n elementos.

7. (a) Mostre que se p é um primo, então o polinômio $f(x) = x^n - p$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, $\forall n \geq 1$.
   (b) Mostre que o polinômio $f(x) = 1 + x + ... + x^{p-1}$, ($p$ primo), é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

8. Prove que se D é um anel de integridade, então $D[x]$ é também um anel de integridade.

9. (a) Seja D um anel de integridade. Descreva os inversíveis de $D[x]$.
   (b) Encontre os inversíveis de $\mathbb{Z}[x]$ e de $\mathbb{Z}_7[x]$.

10. Considere $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = x^2 + 2x - 3$, em $\mathbb{Z}_7[x]$. Encontre $q, r \in \mathbb{Z}_7[x]$ tais que $f = g \cdot q + r$, com $r = 0$ ou $g(r) < 2$.

11. (a) Decomponha $f(x) = x^4 + 4$ em fatores irredutíveis de $\mathbb{Z}_5[x]$.
(b) Faça o mesmo para $f(x) = x^3 + 2x + 3$ em $\mathbb{Z}_5[x]$.
(c) $f(x) = x^2 + 6x + 12$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$? E em $\mathbb{R}[x]$? E em $\mathbb{C}[x]$?
(d) Repita o item (c) para $g(x) = x^2 + 8x - 2$.

12. Seja F um corpo. Prove que todo ideal primo de $F[x]$ é maximal.

13. Verifique se o conjunto J é ideal de R:
(a) $J = \{f \in \mathbb{Q}[x] \ / \ f(\sqrt{5}) = 0\}, \quad R = \mathbb{Q}[x]$;
(b) $J = \{f \in \mathbb{Q}[x] \ / \ f(\sqrt{3}) > 0\}, \quad R = \mathbb{Q}[x]$;
(c) $J = \{f \in \mathbb{Q}[x] \ / \ (x+1)f \mid (x^2+1)(x^2-2)\}, \quad R = \mathbb{Q}[x]$;
(d) $J = \{f \in \mathbb{Z}_7[x] \ / \ (x+1) \mid (x^2+1)f\}, \quad R = \mathbb{Z}_7[x]$.
Nos casos afirmativos, encontre $g \in R$, mônico, tal que $J = \langle g \rangle$.

14. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justifique ou dá contra-exemplo.

a) Se R é um anel com divisores de zero, então $R[x]$ é um anel com divisores de zero.

b) Se $E \subset F$ são corpos e $f \in E[x]$ então o conjunto $J = \{\alpha \in F \mid f(\alpha) = 0\}$ é um ideal de F.

c) Se $E \subset F$ são corpos e $\alpha \in F$ então o conjunto $J = \{f \in F[x] \mid f(\alpha) = 0\}$ é um ideal de $F[x]$.

d) Se F é um corpo, os inversíveis de $F[x]$ são os elementos não nulos de F.

e) Um polinômio de grau n com coeficientes em F pode ter mais que n raízes, em algum corpo E que contenha F.

15. Mostre que sobre qualquer corpo existem infinitos polinômios irredutíveis.

16. Seja $f \in \mathbb{R}[x],\ grau(f) = 2$. Prove que $f(x) = ax^2 + bx + c$ é irredutível sobre $\mathbb{R}$ se e somente se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

17. Determine todos os polinômios irredutíveis de grau 2 em $ze_5[x]$. Determine todos os polinômios irredutíveis de grau 3 em $ze_3[x]$

18. Decomponha em produtos de polinômios irredutíveis os polinômios $f \in F[x]$ abaixo sobre os corpos indicados.

$$a)\ f = x^4 - 5x^2 + 6, \quad F = \mathbb{Q};\ F = \mathbb{R},\ F = \mathbb{C}; \quad b)\ f = x^4 + x^3 + x^{+}\bar{1}, \quad F = \mathbb{Z}_3.$$

3^a parte: Domínios Euclidianos, domínios de ideais principais e domínios fatoriais

1. Mostre que todo corpo é um domínio euclidiano.

2. Mostre que quaisquer dois máximos divisores comuns de dois elementos não nulos em um domínio de integridade são associados.

3. Seja R um domínio de integridade.
a). Mostre que todo elemento primo de R é irredutível.
b). Mostre que em um DIP vale a recíproca do item anterior.
c). Prove que $2 + \sqrt{-5}$ é irredutível porém não é primo.

4. Seja R um domínio de integridade.
(a) Defina um mínimo múltiplo comum de dois elementos de R.
(b) Mostre que em um domínio de ideais principais todo par de elementos a, b tem um mínimo múltiplo comum.

5. Se R um domínio de ideais principais e sejam $a, b, c \in R$. Mostre que a). a e b são relativamente primos se e somente se $\langle a \rangle + \langle b \rangle = R$; b). se a e b são relativamente primos e a divide bc, então a divide c; c). se a e c são relativamente primos e b e c são relativamente primos, então ab e c são relativamente primos.

6. Determine o máximo divisor comum em $\mathbb{Z}[i]$, entre os seguintes elementos:
(i) $\alpha = 3 + 4i$ e $\beta = 4 - 3i$
(ii) $\alpha = 11 + 7i$ e $\beta = 18 - i$

7. Considere $\mathbb{Z}[x]$ o anel de polinômios com coeficientes inteiros.
(a) $\mathbb{Z}[x]$ é um domínio de fatorização única?
(b) Mostre que $I = \{a + xf(x) \mid a \in 2\mathbb{Z},\ f \in \mathbb{Z}[x]\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[x]$.
(c) $\mathbb{Z}[x]$ é um domínio de ideais principais?
(d) $\mathbb{Z}[x]$ é um domínio euclidiano?

8. Demonstrar que uma condição necessária e suficiente para que o elemento a num domínio euclidiano seja uma unidade é que $d(a) = d(1)$.

9. Verifique se as funções abaixo são valorizações euclidianas para os anéis R indicados:
(a) $v(n) = n^2,\ \forall n \neq 0,\ R = \mathbb{Z}$;
(b) $v(f) = grau(f),\ \forall f \neq 0,\ R = \mathbb{Z}[x]$;
(c) $v(f) = |a_n|$, se $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 + a_0$ com $a_n \neq 0,\ R = \mathbb{Z}[x]$.

10. Verifique se os elementos α abaixo são irredutíveis nos domínios D indicados. Nos casos em que couber, decomponha α como produto de irredutíveis:
(a) $\alpha = 14$ em $D = \mathbb{Z}$.
(b) $\alpha = 2x - 10$ em $D = \mathbb{Z}[x]$.
(c) $\alpha = 2x - 10$ em $D = \mathbb{Z}_{11}[x]$.
(d) $\alpha = 5$ em $D = \mathbb{Z}[i]$.
(e) $\alpha = 7$ em $D = \mathbb{Z}[i]$.
(f) $\alpha = 4 + 3i$ em $D = \mathbb{Z}[i]$.

11. Mostre que 3, 7, $1 + 2\sqrt{-5}$ não são primos em $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

12. Mostre que um domínio de ideais principais todo ideal distinto do anel todo está contido num ideal maxímal.

13. Seja R. um domínio fatorial. Mostre que para quaisquer $a, b \in R$, existe um máximo divisor comum de a e b.

14. Seja R um domínio euclidiano e seja $v : R \setminus \{0\} to \mathbb{N}$ uma função que satisfaz as condições na definição de domínio euclidiano.
a). Sejam a, b são associados ambos $\neq 0$, então $v(a) = v(b)$.
b). Se $v(a) = v(b)$ e $a \,|\, b$ implicam que a e b são associados.
c). Mostre que $v(1) \leq v(a)$, para todo $a \in R$, $a \neq 0$.
d). Seja $u \in R$, $u \neq 0$. Mostre que u é inversível se e somente se $v(u) = v(1)$.