$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios MAT 134
Introdução à Álgebra Linear - 2017 - Profa. Iryna Kashuba

$1^{\underline{a}}$ parte: Espaços vetoriais: definições, exemplos, subespaos

1. Mostre que com as regras usuais para somar funcões e multiplicar funções por números reais. O conjunto S dos funções da reta na reta que se anulam no ponto 2 é um espaço vetorial. O que acontece se a condição $f(2) = 0$ é substituida por $f(2) = 1$?

2. Verifique se $V = \{(x, y \,|\, x, y \in \mathbb{R})\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição $\oplus$ e de multiplicação por escalares $\otimes$ dadas por:

   a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad \alpha \otimes (x, y) = (x, \alpha y)$
   b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1); \quad \alpha \otimes (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$
   c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1); \quad \alpha \otimes (x, y) = (x, \alpha y)$
   d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1); \quad \alpha \otimes (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y - \alpha + 1)$

3. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\}$
   b) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y, z \in \mathbb{Q}\}$
   c) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, A$ é invertível $\}$
   d) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \,|\, p(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$
   e) $V = C^2(\mathbb{R})$ e $S = \{f \in C^2 \,|\, af'' + bf' + cf = 0\}$
   f) $V = C(\mathbb{R})$ e $S = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \int_0^1 f(x)^2 dx = 0\}$

$2^{\underline{a}}$ parte: LI e LD num espaço vetorial, geradores e base

1. Em cada caso, considere o sistema de equações homogêneo que tem a matriz dada como matriz de coeficientes, encontre as soluções básicas do sistema, e expresse a solução geral como combinação linear dessas soluções básicas.

   a). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ c). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

2. Determine se cada um dos conjuntos abaixo de vetores determina ou não uma base de $\mathbb{R}^3$:

   (i) $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$;
   (ii) $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 3, 0)$;
   (iii) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$;
   (iv) $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$, $(5, 3, 4)$.

3. Determine a dimensão e uma base do espaço de soluções dos sistemas homogêneos abaixo:

$$a). \begin{cases} x+2y+z-2t=0 \\ 2x+4y+4z-3t=0 \\ 3x+6y+7z-4t=0 \end{cases} \qquad b). \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+3y+3z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$$

4. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B = \{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

5. Encontre uma base e a dimensão para os seguintes subespaços:
   a). $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \,|\, p(2) = 0\}$
   b). $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x - 3y + 2z = 0\}$
   c). $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \,|\, p(2) = p(-1)\}$
   d). $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, 3a_{22} = 5a_{12}\}$
   e). $S = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x = u = v\}$
   f). $S = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = y,\ 2x - y + 3z - u = 0\}$
   g). $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, A$ comuta com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\}$

6. Seja $B = \{1, 2-x, x^2+1, 1+x+x^2\}$. Verifique que B é uma base para $P_3(\mathbb{R})$ e determine as coordenadas do polinômio $p(x) = x^3$ em relação à base B.

7. * Uma matriz quadrada é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ quaisquer que sejam i e j. Mostre que o conjunto formado pelas matrizes simétricas é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$. Determine uma base para o subespaço das simétricas em $M_3(\mathbb{R})$. Mostre que a dimensão das simétricas em $M_n(\mathbb{R})$ é $\frac{n^2+n}{2}$.

8. Seja A uma matriz $m \times n$ e sejam $B_1, B_2, \ldots, B_k$ colunas em $\mathbb{R}^m$ tais que o sistema $AX_i = B_i$ tem uma solução X_i para cada i. Se $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ é LI em $\mathbb{R}^m$, mostre que $\{X_1, \ldots, X_k\}$ é LI em $\mathbb{R}^m$.

9. Verifique se o conjunto de funções B é LI ou LD nos seguintes casos:
   a). $B = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}\}$
   b). $B = \{e^x \cos 2x, e^{2x} \operatorname{sen} 3x, e^{3x} \cos 4x\}$
   c). $B = \{\cos t, \cos 2t, \cos 3t\}$

10. Verifique se os seguintes conjuntos são LI ou LD
    a). $\{t^2+t, t-1, t\} \subset P_2(\mathbb{R})$
    b). $\{t^3, t^2-1, t+2, t^3+t^2-t-3\} \subset P_3(\mathbb{R})$
    c). $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

11. Uma matriz A não é quadrada, mostre que ou as linhas ou as colunas de A são LD.

12. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1, 1, 1, 0)$ e $(1, 1, 2, 1)$.

13. Sejam $A = \{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)\}$, $S = [A]$ e $v = (0, m - m, 1, 1)$. Determine uma base de S. Determine todos os valores de m para os quais $v \in S$.

14. Para os sistemas lineares a seguir, determine o posto e a dimensão e uma base do subespaço das soluções

    a). $\begin{cases} x - 3y + 2z - w = 0 \\ x - 2y + 4z + 3w = 0 \\ x - 5y - 2z - 9w = 0 \end{cases}$ b). $\begin{cases} x + 5y - 3z + 2w = 0 \\ x + 6y + 2z - 3w = 0 \\ x + 3y - 13z + 12w = 0 \end{cases}$

15. Sejam A e B dois vetores no $\mathbb{R}^2$ e suponhamos que são ambos diferentes de zero. Se não existir nenhum $c \in \mathbb{R}$ tal que $cA = B$, mostrar que A e B formam uma base de $\mathbb{R}^2$ e que $\mathbb{R}^2$ é a soma direta dos subespaços gerados por A e B respectivamente.

$3^{\underline{a}}$ parte: Espaços com produto interno

1. Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Sendo $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$ em $\mathbb{R}^2$, determine um vetor w desse espaço tal que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle v, w\rangle = 3$.

2. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|v\| = 1$, $\|u\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Determinar $\langle u, v\rangle$.

3. Num espaço vetorial euclidiano provar que $\|u\| = \|v\| \iff \langle u + v, u - v\rangle = 0$.

4. Num espaço vetorial euclidiano provar que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 = \|v\|^2 \iff \langle u, v\rangle = 0$.

5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e sejam u e v em V. Prove que o vetor $\|u\|v + \|v\|u$ é paralelo à bissetriz do ângulo formado por u e v.

6. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y - 2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostrar que $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$. Determinar a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto definido nesse exercío.

7. Considere em P_2 o produto interno dado por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Seja $S = \{p(x) \in P_2 \,|\, p(1) = 0\}$. Determine uma base ortogonal de S. Dado $f \in P_2$, encontre vetores $p_1 \in S$ e $p_2 \in S^{\perp}$ tais que $f = p_1 + p_2$.

8. Sejam u e v vetores fixos de um espaço vetorial euclidiano. Achar o vetor de menor norma de conjunto $\{u + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, supondo $v \neq 0$.