# $2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios MAT 111
# Cálculo Diferencial e Integral I - IG - 2017
# Profa. Iryna Kashuba

## $1^{\underline{a}}$ parte: Funções exponencial e logarítmica, funções inversas

1. Achar domínio e imagem da função dada:

$a)\ f(x) = \sqrt{t}\ln(t^2-1)$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \ln(t^3-t)$

2. Calcule, caso exista

$a)\ \lim_{x\to+\infty}(2^x-3^x)$ $\quad$ $b)\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-2^x}{1-3^x}$ $\quad$ $c)\ \lim_{x\to+\infty}(2^x+2^{-x})$ $\quad$ $d)\ \lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+3))$

$e)\ \lim_{x\to0}\dfrac{5^x-1}{x}$ $\quad$ $f)\ \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ $\quad$ $g)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$ $\quad$ $h)\ \lim_{x\to+\infty}(x\ln 2-\ln(3^x+1))$

$i)\ \lim_{x\to0+}\dfrac{3^x-1}{x^2}$ $\quad$ $j)\ \lim_{x\to0}\dfrac{e^\pi-1}{x}$ $\quad$ $k)\ \lim_{x\to1^+}(\ln x)^{x-1}$ $\quad$ $l)\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$

$m)\ \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+3)^{x+4}-\ln(x+2)^{x+4}\right]$ $\quad$ $n)\ \lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\operatorname{tg}x}$ $\quad$ $o)\ \lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}2x)^{1/\operatorname{sen}x}$

## $2^{\underline{a}}$ parte: Derivadas, TVM e Graficos:

1. Calcule a derivada

$a)\ f(x) = \ln(\operatorname{sen}x+\operatorname{tg}x)$ $\quad$ $b)\ f(x) = \cos x+(x^3+e^x)\operatorname{sen}x$ $\quad$ $c)\ f(x) = \dfrac{x^2\cos x-7e^x}{3\ln x+\operatorname{sen}x}$

$d)\ f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^{2011})}$ $\quad$ $e)\ \operatorname{senh}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ $\quad$ $f)\ f(x) = x^{\operatorname{sen}x}$ $\quad$ $g)\ f(x) = \cos^4 x^3$

$h)\ f(x) = (x^2+\operatorname{cotg}x^2)^{\operatorname{tg}x^2}$ $\quad$ $i)\ f(x) = \sqrt{e^x+e^{-x}}$ $\quad$ $j)\ f(x) = \dfrac{\cos(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}(\cos x)}$ $\quad$ $k)\ f(x) = e^{x^2\cos x}$

$l)\ f(x) = \dfrac{x+\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}$ $\quad$ $m)\ f(x) = x^{x^x}$ $\quad$ $n)\ f(x) = \pi^{\operatorname{arctg}x}+x^\pi$

2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável com $g'(2) = 5$. Considere $f(x) = g(x^2+1)$ e calcule $f'(1)$.

3. Mostre que $h(x) = 2x + \cos x$. Mostre que $h$ é bijetora. Calcule $h^{-1}(x)$ e determine $(h^{-1})'(1)$ se existir.

4. Seja $f(x) = x + e^x$ e $g$ a função inversa de $f$. Calcule $g'(1)$ e $g''(1)$.

5. Determinar $c$ e $d$ para que a função

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2, & x \leq 2, \\ cx + d, & x > 2 \end{cases}$$

seja derivável no ponto $x = 2$.

6. Seja $f$ derivável. Mostrar que

   (a) se $f$ é par, então $f'$ é ímpar;

   (b) se $f$ é ímpar, então $f'$ é par;

   (c) se $f$ é periódica com período $T$, então $f'$ é também.

7. Encontre

$$a)\ \frac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln(x)) \qquad b)\ \frac{d^n}{dx^n} \ln x \qquad c)\ \frac{d^n}{dx^n} \cos(2x)$$

8. Encontre $y'$ se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

9. Encontre $y'$ se $y^x = x^y$.

10. Determinar $f'$, $f''$, $f'''$ e seus domínios de definição para

$$a)\ f(x) = x^2|x| \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \qquad c)\ f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

11. Seja $f$ e $g$ duas funções deriváveis até a ordem 2 e $F(x) = (f \circ g)(x)$. Calcular $F''(x)$.

12. Seja $f$ contínua em $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = 0$ com $a > 0$. Provar que existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que

$$f'(c_1) = -\frac{f(c_1)}{c_1} \qquad f'(c_2) = \frac{f(c_2)}{c_2}$$

13. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 2)$ e é tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^3 - 5x + 6$.

14. Use o TVM para prover as seguintes desigualdades:

    i). $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \geq |b - a|$ , para todos $a, b \in \mathbb{R}$;

    ii). $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$ , para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, $b \geq 1$;

    iii). $|\ln a - \ln b| \leq |a - b|$ , para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$, $b \geq 1$;

    iv). $e^x - e^y \geq x - y$ , para todos $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \geq y \geq 0$.

15. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$ e seja $g$ a sua inversa. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que

$$g(b) - g(a) \leq \frac{1}{2}(b - a).$$

16. Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.

17. Seja $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não existe $c$ tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Porque isso não contradiz o teorema do valor médio?

18. Determine a constante $a$ para que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha

    a). um mínimo local em $x = 2$;

    b). um mínimo local em $x = 3$.

    Mostre que $f$ não terá máximo local para nenhum valor de $a$.

19. Demonstrar as desigualdades

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + x}} < \ln(1 + x) < x, \qquad x > 0.$$

20. Determinar o ponto $P$ da curva $y = x^2 + x$ que se encontra mais próximo de ponto $(7, 0)$.

21. Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem máximos nem mínimos locais.

22. Mostre que a equação $2x - 1 - \operatorname{sen}(x) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

23. Determine o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado seja maxima.

24. Seja $a \in R$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{ax-1}{ax+1}\right)^x = 4$. Determine $a$.

25. Calcule

$a)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x^2}{\ln(1+3x^2)}$ $\quad b)$ $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ $\quad c)$ $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{1 - \cos x} - \dfrac{2}{x^2})$ $\quad d)$ $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x-1}$

$e)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$ $\quad f)$ $\lim\limits_{x \to 0+} (\operatorname{sen} x \ln x)$ $\quad g)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} + \ln x\right]$ $\quad h)$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

$i)$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ $\quad j).$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$ $\quad k)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ $\quad l)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^p \ln x,\ p > 0$

26. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos locais e globais, determine os intervalos de crescimento e de decrescimento:

$a)$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad b)$ $f(x) = e^x - e^{-3x}$ $\quad c)$ $f(x) = xe^{-2x}$ $\quad d)$ $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

$e)$ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ $\quad f)$ $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$ $\quad g)$ $f(t) = -t^3 + 3t^2 + 4,\ t \in [-1, 3]$

27. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem:

$a)$ $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ $\quad b)$ $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ $\quad c)$ $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ $\quad d)$ $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$

$e)$ $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$ $\quad f)$ $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$ $\quad g)$ $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$ $\quad h)$ $f(x) = arctg(\ln x)$

28. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão:

$a)$ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad b)$ $f(x) = xe^{1/x}$ $\quad c)$ $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

29. Para cada uma das funções abaixo, esboce o gráfico:

$a)\ f(x) = x^3 - x^2 + 1$ $\quad b)\ f(x) = x^4 - 2x^2$ $\quad c)\ f(x) = \dfrac{4x + 3x^2}{x^2 + 1}$ $\quad d).\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

$e)\ f(x) = e^x - e^{3x}$ $\quad f)\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ $\quad g)\ f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$

$h)\ f(x) = \ln(x^4 + 27)$ $\quad i)\ f(x) = e^{-1/(x+1)}$ $\quad j)\ f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 9}$

30. Achar os valores máximo e mínimo de:

i) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi];$

ii) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3},\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1;$

iii) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x,\ \frac{1}{2} \leq x \leq 4;$

iv) $f(x) = |x^4 - 2x^3|,\ 0 \leq x \leq 3.$