1^a Lista de Exercícios de Anéis e Corpos - MAT0264

1^a parte: Anéis, propriedades básicas de anéis

1. Nos casos abaixo, verifique se o conjunto R, munido das operações indicadas, é um anel. Justifique suas afirmações.

a) $R = \mathbb{Z}^+$, com a adição e multiplicação usuais.

b) $R = 2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, com adição e multiplicação componente a componente.

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ com adição e multiplicação usuais.

d) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ com adição e multiplicação usuais.

e) $R = \{ri \mid r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ com adição e multiplicação usuais.

Nos casos em que R for um anel, verifique se R tem unidade, se R tem divisores de zero, se R é um corpo.

2. Descreva os elementos inversíveis dos seguintes anéis:

a) $\mathbb{Z}$	b) $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$	c) $\mathbb{Z}_5$	d) $M_2(\mathbb{Q})$
e) $\mathbb{Z} + \mathbb{Q}$	f) $\mathbb{Z}_{15}$	g) $\mathcal{F}(\mathbb{R})$	h) $\mathbb{Q}[x]$

3. Dado um anel comutativo com unidade $(R, +, \cdot, 0, 1)$. Defina no conjunto R novas operações $\oplus$ e $\circ$, da seguinte forma $x \oplus y = x + y - 1$ e $x \circ y = x + y - x \cdot y$. Mostre que $(R, \oplus, \circ)$ é um anel comutativo com unidade.

4. Ache os divisores de zero em $\mathbb{Z}/92\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/102\mathbb{Z}$.

5. Encontre todas as soluções da equação $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ em $\mathbb{Z}_{12}$.

6. Mostre que o inverso multiplicativo em um corpo é único.

7. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, provando-as ou exibindo um contra-exemplo:

a) Todo anel com unidade tem pelo menos dois elementos inversíveis.

b) Existem um corpo K e um subanel L de K tais que L não é subcorpo de K.

c) $n \cdot \mathbb{Z}$ tem divisores de zero se n não é primo.

8. Seja $\mathbb{Z}_5[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, i^2 = -1\}$. Elementos são adicionados e multiplicados como em números complexos, exceto que é módulo 5. Mostre que $\mathbb{Z}_5[i]$ é um corpo.

9. Seja $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$. Prove que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ é um anel com as operações $+$ e $\cdot$ usuais dos reais.

10. Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é um corpo.

11. Ache um elemento não nulo num anel que não é um divisor de zero nem uma unidade.

12. Descreva todos os divisores de zero e unidades de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

13. Ache o inverso multiplicativo de $\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_4[x]$ e o inverso multiplicativo de $\bar{4}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{2}x + \bar{5} \in \mathbb{Z}_8[x]$.

2^a parte: Homomorfismos, Ideais, Anel Quociente, Corpos

1. Mostre que o anel das matrizes $M_2(\mathbb{R})$ não possui ideais próprios.

2. Sejam U, V ideais de R e considere os conjuntos

$$\begin{aligned} U + V &= \{x + y \,|\, x \in U, y \in V\}, \\ U \cap V &= \{x \in R \,|\, x \in U \ x \in V\}, \\ U \cdot V &= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,|\, x_i \in U,\ y_i \in V,\ n \in \mathbb{Z}^+\}. \end{aligned}$$

Mostre que $U + V,\ U \cdot V,\ U \cap V$ são ideais de R tais que $U \cdot V \subset U \cap V$, $U \subset U + V, \quad V \subset U + V$.

3. Encontre todos os ideais N de $\mathbb{Z}_{12}$. Em cada caso, determine o quociente $\mathbb{Z}_{12}/N$, isto é, encontre um anel conhecido que seja isomorfo a $\mathbb{Z}_{12}/N$. Quais destes ideais são primos? Quais são maximais? Justifique.

4. Considere $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ o anel das funções contínuas de [0,1] em $\mathbb{R}$. Mostre que m é um ideal maximal de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ se e somente se existe $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$m = m_\alpha = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(\alpha) = 0\}$$

5. Descreva todos os homomorfismos de anéis de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Faça o mesmo para os homomorfismos de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

6. Mostre que $\varphi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ definido por

$$\varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad\qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

é um monomorfismo de $\mathbb{C}$ em $M_2(\mathbb{R})$.

7. a) Mostre que os anéis $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ não são isomorfos. Mostre também que os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não são isomorfos.
b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ são isomorfos?

8. Um elemento a de um anel R diz-se nilpotente se existe $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 1$, tal que $a^n = 0$.

a) Mostre que o conjunto dos elementos nilpotentes de um anel comutativo R é um ideal, chamado radical de R. O que se pode dizer no caso em que R não é comutativo?

b) Determine o radical de $\mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{32}$, de $\mathbb{Z}$.

c) Mostre que se N é o radical de um anel comutativo R então o anel quociente R/N tem radical nulo (isto é, R/N não tem elementos nilpotentes não nulos).

d) Seja a um elemento nilpotente num anel comutativo R. Mostre que $1+a$ é uma unidade de R. Mostre que a soma de um nilpotente com una unidade é uma unidade de R.

9. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, provando-as ou exibindo um contra-exemplo.
a) Todo ideal primo de um anel comutativo com unidade R é maximal.
b) Todo ideal maximal de um anel comutativo com unidade R é primo.
c) $\mathbb{Q}$ é um ideal de $\mathbb{R}$.
d) $\mathbb{Q}$ é um subanel de $\mathbb{R}$.
e) Todo quociente de uma anel comutativo é comutativo.

10. Quantos elementos tem $\mathbb{Z}[x]/\langle i+3\rangle$. Justifica.

11. Sejam M e N ideais de um anel R.
a) Mostre que N é ideal de $M+N$
b) Mostre que $M \cap N$ é ideal de M.

c) Mostre que $(M+N)/N$ é isomorfo a $M/(M\cap N)$.

12. Mostre que $I=\{(3x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

13. Mostre que $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2+x+1\rangle$ é um corpo. Mostre que $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+x+1\rangle$. não é um corpo.

14. Seja $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ e $H=\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$. Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ e H são isomorfos como anéis.

15. Considere a aplicação de $M_2(\mathbb{Z})$ em $\mathbb{Z}$ dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to a.$$

Esta aplicação é um homomorfismo de anéis?

16. Ache todos os homomorfismos de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Z}$.

17. Ache todos os homomorfismos de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

18. Seja ϕ um homomorfismo de um anel comutativo R para S e I um ideal em S.
a) Se I é primo em S, então $\phi^{-1}(I)$ é um ideal primo de R.
b) Se I é maximal em S, então $\phi^{-1}(I)$ é um ideal maximal de R.

19. Seja R um anel e I um ideal de R. Mostre que existe uma correspondência biunívoca entre os ideair de R que contêm I e os ideais do anel quociente R/I.