$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios MAT 134
Introdução à Álgebra Linear - 2015 - Profa. Iryna Kashuba

$1^{\underline{a}}$ parte: Resolução de sistemas de equações lineares, eliminação de Gauss, matrizes elementares

1. Para cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, escreva a forma escalonada reduzida da matriz completa e resolva o sistema

a). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3 \end{cases}$

b). $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 8x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 8x_2 - 25x_3 = -5 \end{cases}$

c). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \\ -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 3x_5 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 1 \end{cases}$

2. Em cada caso, encontre (se possível) condições sobre os números a, b e c para que o sistema dado tenha nenhuma solução, uma única solução, ou infinitas soluções

a). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = a \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 - 3x_2 = c \end{cases}$ b). $\begin{cases} ax_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = b \end{cases}$ c). $\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & -5 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Mostre que A e A^T têm o mesmo posto. *Observação:* isso é verdadeiro para toda matriz A.

4. Seja $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Considere o sistema não-homogêneo $AX = B$ e o sistema homogêneo associado $AX = 0$. Prove ou dê contra-exemplo.

   (a) Se $AX = B$ tem infinitas soluções, então $AX = 0$ tem infinitas soluções.
   (b) Se $AX = 0$ tem infinitas soluções, então $AX = B$ tem infinitas soluções.
   (c) Se $AX = B$ não tem solução, então $AX = 0$ só tem a solução trivial.
   (d) Se $AX = 0$ só tem a solução trivial, então $AX = B$ tem solução única.

5. Suponha que um sistema homogêneo tenha 4 equações e 6 incógnitas e seja A sua matriz completa. Pode o sistema ter uma única solução? nenhuma solução? Quantos parâmetros o sistema pode ter, se uma linha de A é um múltiplo de uma outra linha? Quantos parâmetros o sistema pode ter se $posto(A) = 4$? Se $posto(A) = 2$?

6. Resolva o sistema $AX = 0$ por eliminação de Gauss. Escreva as matrizes elementares que transformam A na matriz na forma escalonada U. Calcule a matriz M tal que $MA = U$.

$$a).\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b).\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad c).\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Se E é uma matriz elementar. Mostre que E^T é também uma matriz elementar, do mesmo tipo que E.

8. Se A é uma matriz $m \times n$ e posto de A é m, mostre que $m \leq n$.

9. Determine os valores de m para os quais o sistema possui uma única solução

$$\text{a).} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - mx_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{b).} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 + mx_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + z = 6 \end{cases}$$

$2^{\underline{a}}$ Matrizes, determinantes e matrizes inversas

1. Em cada caso, encontre matrizes inversíveis U tais que $UA = R$ é a forma escalonada reduzida de A

$$\text{a).}\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b).}\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Em cada caso encontre a matriz A

a). $[2A^T - 3I]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b). $[A^T - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Se A é inversível e A comuta com C, mostre que A^{-1} também comuta com C. Se A e C são inversíveis e comutam, mostre que A^{-1} e C^{-1} também comutam.

4. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ é inversível e calcule a sua inversa.

5. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa. Suponhamos que A, B e C são matrizes quadradas.

   (i) Se $A^3 = 3I$, então A é inversível.

   (ii) Se $A^2 = A$ e $A \neq 0$, então A é inversível.

   (iii) Se A e B são inversíveis, então $A + B$ é inversível.

   (iv) Se A e B são inversíveis, então AB é inversível.

   (v) Se $AB = 0$ e $A \neq 0$, então $B = 0$.

   (vi) Se $AC = I$, então $C = A^{-1}$.

   (vii) Se $AB = AC$, então $B = C$.

   (viii) Se $AB = 0$, então nem A nem B têm inversa.

   (ix) Se AB é inversível, então A e B são inversíveis.

   (x) Se A é simétrica e inversível então A^{-1} também é simétrica.

6. Mostre que as seguintes matrizes são inversíveis e calcule as suas inversas:

$$a).\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b).\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$3^{\underline{a}}$ parte: LI e LD em $\mathbb{R}^n$, geradores e base

1. Em cada caso, considere o sistema de equações homogêneo que tem a matriz dada como matriz de coeficientes, encontre as soluções básicas do sistema, e expresse a solução geral como combinação linear dessas soluções básicas.

$$\text{a).} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{b).} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{c).} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Determine se cada um dos conjuntos abaixo de vetores determina ou não uma base de $\mathbb{R}^3$:

   (i) $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$;

   (ii) $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 3, 0)$;

   (iii) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$;

   (iv) $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$, $(5, 3, 4)$.

3. Determine a dimensão e uma base do espaço de soluções dos sistemas homogêneos abaixo:

$$a).\ \begin{cases} x + 2y + z - 2t = 0 \\ 2x + 4y + 4z - 3t = 0 \\ 3x + 6y + 7z - 4t = 0 \end{cases} \qquad b).\ \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$