$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios MAT 111

Cálculo Diferencial e Integral I - IG - 2017

Profa. Iryna Kashuba

$1^{\underline{a}}$ parte: Limites de Funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1). $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ 2). $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$ 3). $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$ 4). $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

5). $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$ 6). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ 7). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$ 8). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}$

9). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2}$ 10). $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2-x^3}$ 11). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ 12). $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3})$

13). $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ 14). $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ 15). $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+1}{(5-x)^3}$ 16). $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x+1}{(5-x)^3}$

17). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+16}+x+4)$ 18). $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$ 19). $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

20). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+x\cos x^3}{\sqrt{x^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}+1}}$ 21). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{8x^{16}+3x^4+x}}{3x^4+5}$ 22). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

23). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^4+1})$ 24). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$ 25). $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt[3]{2+3x^3})$

26). $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} p}{x-p}$ 27). $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\cos x-\cos p}{x-p}$ 28). $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} p}{x-p}$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$, calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)x$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $1 + x^2 + \dfrac{x^5}{5} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \dfrac{x^5}{5}$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} \left(f(x) \cos\left(\dfrac{1}{x+x^2} \right) \right)$.

6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|\operatorname{sen} x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\operatorname{sen} x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x) + \cos x)$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule

   a). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$ b). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x}$ c). $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$ d). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(7x)}{3x}$

8. Calcule
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+3x-1}{2x^3-6x+1}.$$
   Mostre que existe $r > 0$ tal que
$$x > r \qquad \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{x^3+3x-1}{2x^3-6x+1} < \frac{3}{4}$$

9. Mostre que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x} = 0.$$

10. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L.$$
   Determine c e L.

11. Existe um número a tal que o limite

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

existe? Caso afirmativo encontre a e o valor do limite.

12. Dê exemplos de funções f e g tais que:

   (a) $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

   (b) $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0}(f(x) - g(x)) = 1$;

   (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x \to 0}(f(x) - g(x)) \neq 0$.

13. Prove que a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ não possui limite quando $x \to 0$.

14. Calcule os seguintes limites usando o teorema do confronto:

   a). $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

   b). $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x}\, 2^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

15. Suponha que para todo x real $|g(x)| \leq x^4$ Calcule $\lim_{x \to 0} g(x)$.

$2^{\underline{a}}$ parte: Funções Contínuas

1. Suponha f contínua em $\mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Prove que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Determine L para que a função dada seja contínua em seu domínio.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 8}{x - 2} & , x \neq 2 \\ L & , x = 2 \end{cases}$ $\qquad$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4} & , x \neq 1 \\ L & , x = 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + 2) - \operatorname{sen}(x + 2)}{x} & , x \neq 0 \\ L & , x = 0 \end{cases}$

3. Use o teorema do valor intermediário para provar que existe uma raiz da equação no intervalo especificado:

   a). $x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (0,1)$ b). $x^2 = \sqrt{x+1} \quad (1,2)$

4. Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 \text{ se } x \leq 3 \\ cx^2 - 1 \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

5. Determine o conjunto dos pontos do seu domínio em que a função f é contínua. Esboçe o grafico.

$$a).\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \text{ se } x \neq -1 \\ 6 & , \text{ se } x = -1 \end{cases} \qquad b).\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3} & , \text{ se } x \neq 3 \\ 1 & , \text{ se } x = 3 \end{cases}$$

$$c).\ f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & , \text{ se } x \neq 1 \\ 0 & , \text{ se } x = 1 \end{cases} \qquad d).\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , \text{ se } x \leq 2 \\ 3x - 5 & , \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

6. Use o teorema do valor intermediário para provar que existe um número c tal que $c^2 = 2$. (Ou seja, demonstre a existência de $\sqrt{2}$)

7. Demonstrar que todo polinômio de grau impar possui pelo menos uma raiz real.

8. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $|f|$ é contínua. Suponhamos que $|f|$ é contínua em $\mathbb{R}$, decide se f é contínua. Jusifique.