SULL'INTEGRALE DI STIELTJES-RIEMANN

(In collaborazione con M. Jacob)

In: *«Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari»*, Roma, 1935, Anno VI, n. 4, pp. 303-319

B. DE FINETTI E M. JACOB

SULL'INTEGRALE DI STIELTJES-RIEMANN

Estratto dal *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*
Anno VI, n. 4, ottobre 1935-XIII

ROMA
ISTITUTO ITALIANO DEGLI ATTUARI
22, VIA MARCO MINGHETTI
1936-XIV

Roma, 1936-XIV. — Tipografia del Senato del dott. G. Bardi.

SULL'INTEGRALE DI STIELTJES-RIEMANN

B. DE FINETTI e M. JACOB

SUNTO. — Si toglie, nella definizione dell'integrale di Stieltjes-Riemann, la restrizione usuale relativa ai punti di discontinuità, si studiano le condizioni d'applicabilità al nuovo caso del teorema d'integrazione per parti, e si mostra, mediante alcune applicazioni, l'interesse che l'estensione considerata può presentare nella matematica attuariale.

1. È noto che la definizione usuale dell'integrale di Stieltjes $\int f(\xi)\, d\Phi(\xi)$ è applicabile soltanto se le due funzioni f e Φ non sono entrambe discontinue in un medesimo punto. Lo Steffensen ha mostrato [1] come tale restrizione si possa togliere modificando la definizione: basta definire l'integrale come il limite cui tende la somma

$$[1] \qquad \sum_h \frac{1}{2} [f(\xi_h) + f(\xi_{h+1})]\,[\Phi(\xi_{h+1}) - \Phi(\xi_h)]$$

quando si proceda a suddivisioni sempre più fini dell'intervallo di integrazione. Questa definizione è equivalente a quella usuale se la predetta restrizione è soddisfatta e vale anche quando ciò non abbia più luogo: da un punto di vista puramente formale (principio di permanenza), queste circostanze possono sembrare senz'altro sufficienti a giustificare un'estensione del concetto di integrale di Stieltjes effettuata su queste basi.

In realtà, ogni concetto matematico ha certamente una definizione puramente nominale, ma essa è però suggerita e motivata da uno scopo, e tale scopo, che della definizione costituisce la ragion d'essere, non dev'essere trascurato per limitarsi al puro aspetto

[1] J. F. STEFFENSEN, *On Stieltjes' Integral and its Applications to Actuarial Questions*. « Journal of the Institute of Actuaries », LXIII, p. III, n. 307, 1932.

formale. Ciò vale anche, in particolare, per il concetto d'integrale: applicato a problemi concreti, un certo tipo d'integrale può corrispondere o non corrispondere alle proprietà che ne giustificano l'applicazione; il modo assai frequente di procedere, per cui si sostituisce in un dato problema senza alcuna precauzione un integrale con un altro a seconda di necessità meramente analitiche, meriterebbe di essere profondamente discusso ed esaminato. Introdurre ad esempio l'integrale di Lebesgue nel Calcolo delle probabilità, non significa semplicemente, come potrebbe sembrare a prima vista, arricchire i propri metodi analitici di un nuovo utile e potente strumento, significa bensì ammettere delle nuove proprietà di teoria delle probabilità (l'estensione alle classi numerabili del teorema delle probabilità totali), cosicchè, per chi non ammetta tali proprietà, l'uso dell'integrale di Lebesgue non è ammissimile. Simili non avvertite difficoltà si avranno presumibilmente per analoghe estensioni in vari campi aventi un significato fisico; ad esempio, le polemiche sull'applicabilità del teorema di Kutta–Joukowski al caso di un profilo laminare rettilineo [2], sarebbero state meglio impostate se, anzichè cercare quale *debba* essere, per ragioni più o meno formali, la definizione di integrale esteso a un circuito con punti angolosi, si fosse pensato semplicemente di esaminare a quali postulati di natura idrodinamica corrispondano le diverse impostazioni, ciò che non toglie, naturalmente, che per un problema formalmente ma non fisicamente identico la soluzione potrebbe essere diversa.

Ritornando al nostro argomento, riteniamo che, volendo procedere in modo soddisfacente, si dovrebbe esaminare dapprima il perchè dell'accennata restrizione, e vedere se essa è essenziale o no: se cioè il concetto informatore del procedimento d'integrazione di Stieltjes, e quindi la ragione della sua applicabilità ad una data classe di problemi, venga completamente a mancare ove quella restrizione non sia soddisfatta, oppure se la difficoltà sia contingente ed eliminabile, e sotto quali condizioni.

È questo che ci proponiamo di fare.

2. Consideriamo la somma

$$[2] \qquad \sum_h f(\bar{\xi}_h)\,[\Phi(\xi_{h+1}) - \Phi(\xi_h)]$$

---

[2] Cfr. le Note di CISOTTI, FERRARI, FINZI, PASCAL, STRANEO nei « Rendiconti dei Lincei » del 1927–28, vol. VII, fasc. 6 e 7, vol. VIII, fasc. 10.

mediante la quale, col solito passaggio al limite, si definisce usualmente l'integrale di Stieltjes. In essa $\bar{\xi}_h$ è un punto qualunque dell'intervallo ξ_h, ξ_{h+1}, e $\Phi(\xi_{h+1}) - \Phi(\xi_h)$ rappresenta, se così si vuol dire, il *peso* attribuito a tale intervallo nell'integrazione, peso che supporremo sempre positivo (Φ crescente), come occorre per la maggior parte dei problemi pratici, e in particolare per quelli che abbiamo in vista.

Poichè per $f(\bar{\xi}_h)$ possiamo prendere un valore di pochissimo inferiore all'estremo superiore μ_h di $f(\xi)$ nell'intervallo ξ_h, ξ_{h+1}, oppure di pochissimo superiore all'analogo estremo inferiore μ'_h, è ovvio[3] che l'integrale esiste (ossia il limite rimane univocamente definito) se, e solo se, hanno lo stesso limite le due espressioni

$$[3] \qquad \sum_h \mu_h [\Phi(\xi_{h+1}) - \Phi(\xi_h)]$$

e

$$[4] \qquad \sum_h \mu'_h [\Phi(\xi_{h+1}) - \Phi(\xi_h)] .$$

Si osservi ancora che, in relazione a queste due espressioni, il concetto di limite può essere sostituito con quello più elementare di estremo inferiore e superiore: il limite della [3] è infatti l'estremo inferiore dei valori che essa assume per tutte le suddivisioni possibili, il limite della [4] è il suo estremo superiore; questi due limiti si chiamano *integrale superiore* e *inferiore* di Stieltjes-Darboux[4] e si indicano rispettivamente con

$$\overline{\int} f(\xi) d\Phi(\xi) \quad , \quad \underline{\int} f(\xi) d\Phi(\xi) .$$

Se, e solo se, questi due integrali coincidono esiste l'ordinario integrale di Stieltjes, o, per meglio precisare, di Stieltjes-Riemann, che è il loro valore comune; si ha così una perfetta analogia con la definizione degli integrali superiore e inferiore di Darboux e dell'integrale di Riemann, che risulta solo generalizzata per l'arbitrarietà lasciata

---

3) Ciò vale anche, benchè non sia altrettanto evidente, nel caso in cui Φ sia a variazione limitata ma non monotona. (Cfr. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, Gauthier Villars, Paris, II ed., pag. 272).

4) LEBESGUE, op. cit. 3) pag. 272.

nella scelta del « peso » attribuito ai diversi intervalli (non necessariamente uguale alle rispettive lunghezze).

Anche le condizioni d'integrabilità rimangono sostanzialmente immutate: dev'essere nulla l'oscillazione media di $f(\xi)$ relativamente ai pesi dati da $\Phi(\xi)$ o, in altre parole, dev'essere nullo l'integrale superiore di Stieltjes-Darboux dell'oscillazione; cioè, indicando con $\omega(\xi)$ l'oscillazione di $f(\xi)$, $\overline{\int} \omega(\xi)\, d\Phi(\xi) = 0$ [5]. La condizione di Du Bois Reymond, che ne discende, si esprime al solito con la « integrabilità », rispetto al « peso » definito da Φ, dell'insieme dei punti in cui $f(\xi)$ ha un salto non inferiore ad ε, qualunque sia $\varepsilon > 0$; per « insieme integrabile » relativamente a un dato « peso » deve intendersi, come rileva il Lebesgue [6], un insieme di punti che può essere racchiuso *internamente* [7] a un insieme finito d'intervalli di « peso » complessivo piccolo quanto si vuole.

Il Lebesgue dice:

« Le mot *intérieur* est indispensable si $\Phi(\xi)$ est discontinue; « alors un ensemble réduit à un seul point ξ_0 n'est pas toujours « un groupe intégrable. En effet, si ξ_0 est point de discontinuité de « $\Phi(\xi)$, il n'existe pas d'intervalle contenant ξ_0 à son intérieur et « pour lequel $\delta\Phi$ soit inférieur à $\Phi(\xi_0 + 0) - \Phi(\xi_0 - 0)$. Ainsi les « groupes intégrables par rapport à $\Phi(\xi)$ sont formés de points de « continuité de $\Phi(\xi)$; une fonction $f(\xi)$ ne peut être intégrable, au « sens de Stieltjès-Riemann, par rapport à $\Phi(\xi)$ que si elle est conti- « nue en tous les points de discontinuité de $\Phi(\xi)$. Par contre une fonc- « tion peut avoir une intégrale de Stieltjès-Riemann et admettre « cependant tous les points d'un intervalle pour points de conti- « nuité. Il suffit que cet intervalle soit un groupe intégrable par rap- « port à $\Phi(\xi)$, c'est-à-dire qu'il suffit que $\Phi(\xi)$ soit constante dans « cet intervalle. On voit combien la nature des groupes intégrables « varie quand varie $\Phi(\xi)$ ».

Si arriva così alla restrizione da cui abbiamo preso le mosse, e che ci siamo proposti di esaminare. E la si ritrova anche nell'enunciato che traduce la condizione di Lebesgue-Vitali: l'insieme dei punti di discontinuità deve avere « misura » nulla rispetto a Φ, ossia, si potrebbe

---

5) Cfr. LEBESGUE, op. cit. 3), pag. 275. Si osservi che anche questi risultati sono ivi dimostrati per ogni Φ a variazione limitata.

6) Op. cit. 3), pag. 276; nel passo riportato abbiamo cambiato i simboli.

7) Cioè « racchiuso in intervalli aperti ».

dire, « peso » nullo. Poichè ciò significa che l'insieme deve poter essere racchiuso in una successione di intervalli *aperti* per cui la serie dei pesi converga e risulti piccola quanto si vuole [8], è ovvio che l'insieme non può contenere alcun punto di discontinuità di Φ, perchè la definizione assegna già a tale punto un « peso » non nullo (uguale al salto).

Il Lebesgue ha mostrato come il concetto informatore dell'integrale di Stieltjes conduca – quando il « peso » si supponga funzione d'insieme « completamente additiva » [9] – a una generalizzazione analoga a quella che – grazie alla sostituzione del concetto di lunghezza con quello della « misura », completamente additiva – ha portato dall'integrale di Riemann all'integrale di Lebesgue. Abbiamo già accennato che una tale estensione non è semplicemente un progresso analitico (e cioè il raggiungimento di conclusioni più ampie in base *ai medesimi* presupposti); essa costituisce una precisazione relativa a un caso speciale, al caso cioè nel quale il « peso » possa supporsi dotato della proprietà specificata, cioè, della completa additività. Il caso che c'interessa è al contrario quello in cui l'additività completa non sussista necessariamente, e non si possa quindi passare all'integrale di Stieltjes–Lebesgue, ma ci si debba arrestare a quello di Stieltjes–Riemann. È appunto per questo caso che, a meglio esaminare, c'è da dire qualcosa di più riguardo ai punti di discontinuità.

3. Quale difficoltà interviene se Φ è discontinua? Se ci si riferisce alla spiegazione del concetto d'integrale di Stieltjes che deriva dalle precedenti osservazioni, si vede che il fatto nuovo essenziale è che, mentre quando Φ è continua non c'è bisogno di specificare se nell'intervallo ξ_h, ξ_{h+1} si considera incluso l'uno o l'altro estremo, il « peso » essendo in ogni caso $\Phi(\xi_{h+1}) - \Phi(\xi_h)$, ciò non sussiste più se Φ è discontinua negli estremi. Per fare il caso più generale si dovrebbero dare, per ogni punto ξ, due valori della funzione Φ, a sinistra e a destra: $\Phi_s(\xi)$ e $\Phi_d(\xi)$; nei punti di continuità si ha necessariamente $\Phi_s(\xi) = \Phi_d(\xi) = \Phi(\xi)$, mentre nei punti di discontinuità $\Phi_s(\xi)$ e $\Phi_d(\xi)$ potranno essere due valori distinti qualsiasi purchè soddisfino alla disuguaglianza

$$\Phi(\xi - 0) \leq \Phi_s(\xi) \leq \Phi_d(\xi) \leq \Phi(\xi + 0). \tag{5}$$

---

[8] Op. cit. 3), pag. 279.

[9] Il peso della somma logica di una infinità numerabile d'insiemi è uguale alla somma della serie dei pesi.

Se ξ_h e ξ_{h+1} sono punti di discontinuità, saranno quindi, in generale, diversi i quattro « pesi » dell'intervallo ξ_h , ξ_{h+1}, cioè:

a) estremi esclusi: $\Phi_s(\xi_{h+1}) - \Phi_d(\xi_h)$,
b) estremi inclusi: $\Phi_d(\xi_{h+1}) - \Phi_s(\xi_h)$,
c) incluso solo ξ_h: $\Phi_s(\xi_{h+1}) - \Phi_s(\xi_h)$,
d) incluso solo ξ_{h+1}: $\Phi_d(\xi_{h+1}) - \Phi_d(\xi_h)$.

Queste considerazioni e distinzioni non hanno del resto alcuna portata pratica se la funzione integranda $f(\xi)$ è continua nei punti di discontinuità di Φ: allora infatti essa ha lo stesso valore sia in ξ che immediatamente a destra o a sinistra $[f(\xi) = f(\xi - 0) = f(\xi + 0)]$ e nessuna speciale precauzione è necessaria nel procedere alla suddivisione nell'intorno di ξ. Ma se in un punto ξ tanto Φ che f sono discontinue, allora è indispensabile precisare che nella suddivisione degli intervalli bisogna tener conto di come si attribuiscono gli estremi, e che, in particolare, un intervallo può ridursi a un solo punto ξ, che avrà « peso » $\Phi_d(\xi) - \Phi_s(\xi)$ (caso (*b*) per $\xi_{h+1} = \xi_h$).

Studiamo infatti il contributo portato all'integrale dalle discontinuità: considerando l'integrale $\int_{\xi-\alpha}^{\xi+\beta} f d\Phi$ esteso a un intervallo piccolissimo contenente il punto di discontinuità ξ e passando al limite per $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_{\xi-0}^{\xi=0} f d\Phi = {} & f(\xi - 0)[\Phi_s(\xi) - \Phi(\xi - 0)] + f(\xi)[\Phi_d(\xi) - \Phi_s(\xi)] + \\
& + f(\xi + 0)[\Phi(\xi + 0) - \Phi_d(\xi)] = c' f(\xi - 0) + c'' f(\xi) + c''' f(\xi + 0)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

indicando con c', c'', c''' le tre parti in cui il salto $c = \Phi(\xi + 0) - \Phi(\xi - 0)$ figura qui scomposto e supponendo esistano i limiti destro e sinistro $f(\xi + 0)$ ed $f(\xi - 0)$ di f in ξ. Se uno di tali limiti non esistesse, $f(\xi)$ sarebbe integrabile soltanto se fosse nulla la parte c' (rispettivamente c''') di salto per cui va moltiplicato; la condizione che f risulti continua nei punti di discontinuità di Φ si cambia dunque nell'altra: che f ammetta limite destro (rispettivamente sinistro) in ogni punto di discontinuità ξ di Φ ogni qualvolta un intervallo infinitesimo a destra (rispettivamente a sinistra) di ξ abbia « peso » positivo (sia cioè $\Phi(\xi+0)-\Phi_d(\xi)>0$, rispettivamente $\Phi_s(\xi)-\Phi(\xi-0)>0$). Tale condizione supporremo in seguito soddisfatta.

Se f è continua in ξ, si ha senz'altro

$$[7] \quad \int_{\xi-0}^{\xi+0} f d\Phi = f(\xi)\{c'+c''+c'''\} = cf(\xi) = f(\xi)[\Phi(\xi+0)-\Phi(\xi-0)],$$

indipendentemente, come s'era affermato, da $\Phi_s(\xi)$ e $\Phi_d(\xi)$ (indipendentemente cioè dalla scomposizione $c=c'+c''+c'''$).

La funzione $\Phi(\xi)$ può sempre essere scomposta nella somma di una parte continua $\Phi_1(\xi)$ e una puramente discontinua $\Phi_2(\xi)$: questa avrà, come $\Phi(\xi)$, causa la monotonia, un numero finito o al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ con discontinuità (salti) $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$, e il valore di $\Phi_2(\xi)$ sarà $\sum_h c_h$ per tutti gli h tali che $\xi_h<\xi$ (sarà cioè la somma di tutti i salti a sinistra di ξ). Se i punti di discontinuità sono in numero finito, è ovvio che

$$[8] \quad \int f d\Phi = \int f d\Phi_1 + \sum_h [c'_h f(\xi-0) + c''_h f(\xi) + c'''_h f(\xi+0)]:$$

l'integrale è cioè la somma dei contributi della parte continua e di ciascuno dei punti di discontinuità. Dimostriamo che la stessa formula sussiste quando le discontinuità sono infinite, e quindi la somma diviene una serie. Poichè la serie dei salti c_h converge, potremo prenderne un numero finito, ad esempio $c_1, c_2, \cdots, c_n$, la cui somma differisca da $\sum_h c_h$ per meno di ε; ciascuno dei punti di discontinuità $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ potrà essere racchiuso in un intervallo $\xi_h-\alpha_h, \xi_h+\beta_h$ tale che

$$\left| \int_{\xi_h-\alpha_h}^{\xi_h-\beta_h} f d\Phi_2 - \int_{\xi-0}^{\xi+0} f d\Phi_2 \right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

(e in modo, beninteso, che questi n intervalli risultino disgiunti), e l'integrale esteso agli intervalli trascurati sarà minore, in valore assoluto, di εM, se è $|f(\xi)|<M$ in tutto il campo d'integrazione. Risulta quindi

$$\left| \int f d\Phi_2 - \sum_{h=1}^{n} [c'_h f(\xi_h-0) + c''_h f(\xi_h) + c'''_h f(\xi_h+0)] \right| < \varepsilon(1+M),$$

ossia la validità della [8] anche nel nuovo caso, com'era da dimostrare.

4. Un caso particolare interessante si ha quando

$$\Phi_s(\xi) = \Phi(\xi - 0) \quad , \quad \Phi_d(\xi) = \Phi(\xi + 0):$$

tali relazioni infatti sussistono quando il « peso » di un intervallo sia una funzione completamente additiva (additiva, cioè, anche per la somma di un'infinità numerabile di intervalli). Riferiamoci, per fissare le idee, al caso in cui la $\Phi(\xi)$ abbia il significato di funzione di ripartizione di una legge di probabilità: $\Phi_s(\xi)$ rappresenta allora la probabilità che il numero aleatorio X risulti $< \xi$, $\Phi_d(\xi)$ la probabilità che sia $X \leq \xi$, e le condizioni ora scritte esprimono che il salto di Φ nel punto di discontinuità ξ rappresenta la probabilità che il numero aleatorio X risulti esattamente uguale a ξ. Se si ammette l'estensione alle classi numerabili del teorema delle probabilità totali, tale relazione sussiste necessariamente, perchè la probabilità che sia $X < \xi$ si può allora scrivere come somma delle probabilità che X sia compreso tra $-\infty$ e $\xi - 1$, $\xi - 1$ e $\xi - 1/2$, $\xi - 1/2$ e $\xi - 1/3$, $\cdots$, $\xi - 1/n$ e $\xi - 1/(n+1)$, $\cdots$ ed è quindi

$$\Phi_s(\xi) = [\Phi(\xi - 1) - \Phi(-\infty)] + \left[\Phi\left(\xi - \frac{1}{2}\right) - \Phi(\xi - 1)\right] + \cdots +$$

$$+ \left[\Phi\left(\xi - \frac{1}{n+1}\right) - \Phi\left(\xi - \frac{1}{n}\right)\right] + \cdots = \lim_{n \to \infty} \Phi\left(\xi - \frac{1}{n}\right) = \Phi(\xi - 0);$$

analogamente si dimostra che

$$\Phi_d(\xi) = \Phi(\xi + 0)$$ [10].

L'additività completa non è però una conseguenza necessaria dell'additività semplice (per classi finite), e quindi, o la si deve ammettere espressamente come nuovo postulato generale, o altrimenti non è possibile affermare che $\Phi_s(\xi) = \Phi(\xi - 0)$, $\Phi_d(\xi) = \Phi(\xi + 0)$, ma si può dire solo che dev'essere

$$\Phi(\xi - 0) \leq \Phi_s(\xi) \leq \Phi_d(\xi) \leq \Phi(\xi + 0) ,$$

[10]) Cfr., ad esempio, FRÉCHET, *Sur la convergence en probabilite*, «Metron», dove tale dimostrazione è stata data - a quanto ci risulta - per la prima volta.

come deve necessariamente aversi in tutti i problemi pratici in cui il «peso» di un intervallo è essenzialmente positivo (e la Φ, quindi, essenzialmente non decrescente).

La [8] assume, nel caso particolare dell'additività completa, la forma più semplice [11])

$$[9] \qquad \int f d\Phi = \int f d\Phi_1 + \sum_h c_h f(\xi_h) .$$

5. La questione più delicata connessa al problema della presente estensione della definizione dell'integrale di Stielties è quella dell'integrazione per parti. Notoriamente la formula usuale d'integrazione per parti sussiste per l'integrale di Stieltjes ordinario, e lo Steffensen ha dimostrato che altrettanto avviene con l'estensione, da lui fatta, di tale integrale, ed è cioè in tutti questi casi

$$[10] \qquad \int f d\Phi = [f\Phi] - \int \Phi df .$$

Seguendo la definizione qui adottata, la risposta è indeterminata, perchè f non ha, per sè stessa, in generale, come Φ, il significato di funzione di ripartizione, per cui l'introduzione di due valori f_s e f_d (a sinistra e a destra) abbia un significato, e d'altra parte, nei punti ove Φ è discontinua, essa non ha un valore determinato, salvo introdurlo per convenzione. E comunque, la validità o meno della [10] per un intervallo contenente il punto di discontinuità ξ dipenderebbe sempre da ben dieci elementi [$\Phi(\xi - 0)$, $\Phi_s(\xi)$, $\Phi(\xi)$, $\Phi_d(\xi)$, $\Phi(\xi + 0)$, e analoghi valori per f]. Più semplice e interessante risulta la condizione per l'applicabilità del processo d'integrazione per parti qualora ci si restringa al caso del n. 3, ove $\Phi_s(\xi) = \Phi(\xi - 0)$ e $\Phi_d(\xi) = \Phi(\xi + 0)$; per cominciare dal caso più semplice, consideriamo un unico punto di discontinuità, ξ_0, a destra e a sinistra del quale le due funzioni Φ ed f siano costanti, e poniamo

---

[11]) Tale espressione è stata assunta da HAHN come definizione (cfr. ad esempio, M. JACOB, *Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione alla matematica attuariale.* «Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari», Anno 2, n. 2, aprile 1932-X). I punti di discontinuità erano allora (almeno da un certo istante in poi) punti di suddivisione. Non valeva però l'integrazione per parti, come era accennato nel lavoro citato, e da tale osservazione ebbero origine le ricerche oggetto della presente nota.

$$f(\xi) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \xi < \xi_0 \\ \alpha + \beta & \text{se } \xi = \xi_0 \\ \alpha + \gamma & \text{se } \xi > \xi_0 \end{cases} \qquad \Phi(\xi) = \begin{cases} a & \text{se } \xi < \xi_0 \\ a + b & \text{se } \xi = \xi_0 \\ a + c & \text{se } \xi > \xi_0 \end{cases} .$$

Gli integrali estesi a un intervallo qualunque contenente ξ_0 saranno:

$$\int f d\Phi = c(\alpha + \beta) \quad , \quad \int \Phi df = \gamma(a + b)$$

$$[f\Phi] = (\alpha + \gamma)(a + c) - a\alpha = a\gamma + c\alpha + c\gamma$$

e dall'identità

$$c(\alpha + \beta) = (a\gamma + c\alpha + c\gamma) - \gamma(a + b) + c\gamma\left(\frac{b}{c} + \frac{\beta}{\gamma} - 1\right)$$

si ricava

$$\int f d\Phi = [f\Phi] - \int \Phi df + c\gamma(\lambda + \mu - 1)$$

con

$$\lambda = \frac{b}{c} \quad , \quad \mu = \frac{\beta}{\gamma}$$

ossia λ e μ tali che sia

$$\Phi(\xi_0) = \Phi(\xi_0 - 0) + \lambda[\Phi(\xi_0 + 0) - \Phi(\xi_0 - 0)],$$

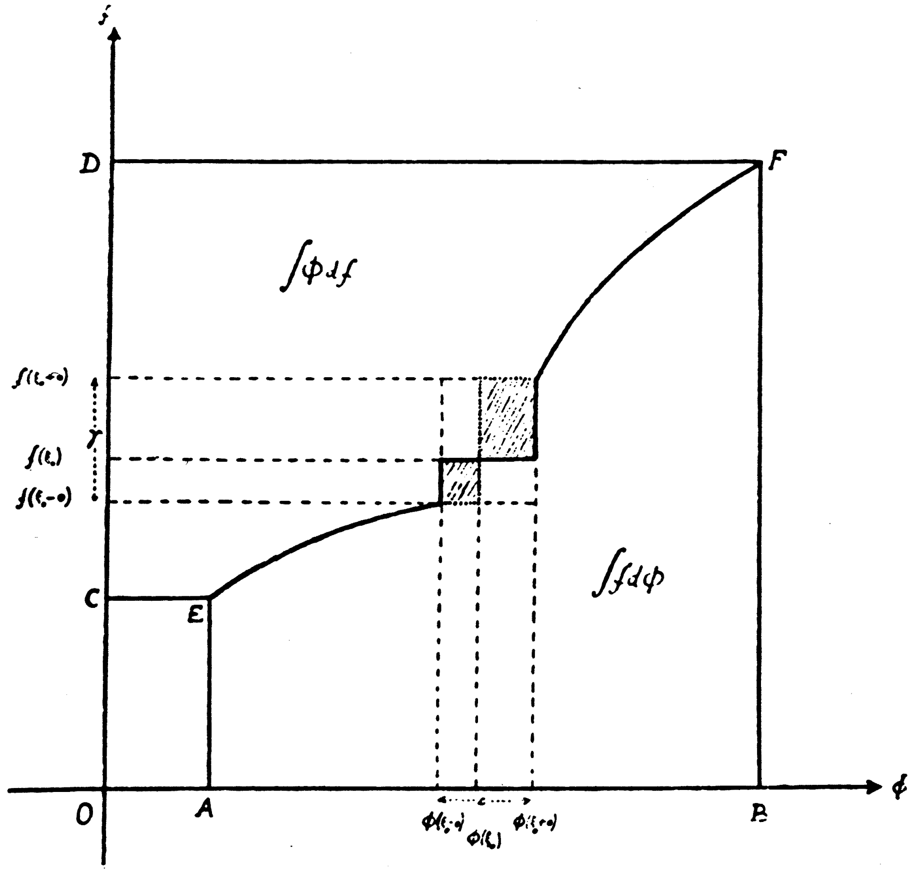
$$f(\xi_0) = f(\xi_0 - 0) + \mu[f(\xi_0 + 0) - f(\xi_0 - 0)].$$

Il termine correttivo cade se, e solo se, $\lambda + \mu = 1$, e in particolare se $\lambda = \mu = 1/2$, caso che corrisponde alla definizione di Steffensen (nei punti di discontinuità il valore della funzione è la semisomma del limite destro e sinistro), oppure se $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ o viceversa (delle due funzioni, una è continua a destra e l'altra è continua a sinistra).

Applicando la [9] si vede che il risultato raggiunto nel caso particolare considerato si estende al caso generale per il quale si ha

$$[11] \qquad \int f d\Phi = [f\Phi] - \int \Phi df + \sum_h c_h \gamma_h [\lambda_h + \mu_h - 1] .$$

Sarà utile rendersi conto anche geometricamente di cosa significhino e perchè compariscano i termini correttivi $c\gamma(\lambda + \mu - 1)$.



La figura mostra senz'altro il significato del teorema d'integrazione per parti: congiungendo con una linea E con F, le aree mistilinee $ABFE$ e $CDFE$, riunite insieme, costituiscono la differenza tra le due aree rettangolari $OBFD$ ed $OAEC$. Nel nostro caso la curva EF è definita dalle equazioni parametriche $\Phi = \Phi(\xi)$, $f = f(\xi)$, e perciò può presentarsi il caso illustrato nella figura, che cioè la curva non risulti completamente determinata. Se infatti per un certo valore $\xi = \xi_0$ si ha una discontinuità per Φ ed f contemporaneamente, avviene il seguente fenomeno: che il cammino d'integrazione EF, anzichè rimanere unico, si sdoppia. Nel calcolare $\int f d\Phi$ (area $ABFE$) è f che rimane costante sul valore $f(\xi_0)$ mentre Φ cresce da $\Phi(\xi_0 - 0)$ a $\Phi(\xi_0 + 0)$ (linea piena); nel calcolare $\int \Phi df$ (area $CDFE$) è al contrario Φ che rimane costante sul valore $\Phi(\xi_0)$ mentre f cresce da $f(\xi_0 - 0)$ a $f(\xi_0 + 0)$ (linea punteggiata). La differenza d'area fra i due cammini d'integrazione è la differenza fra le due aree tratteggiate nella figura, e cioè visibilmente

$$c\gamma[\lambda\mu] - c\gamma[(1-\lambda)(1-\mu)] = c\gamma(\lambda+\mu-1).$$

6. La possibilità di applicare, mediante opportune convenzioni per i valori nei punti di discontinuità, il procedimento d'integrazione per parti, non può naturalmente che accrescere l'utilità e rendere più perfetta l'appropriatezza dell'integrale di Stieltjes come naturale strumento d'espressione per la matematica attuariale.

La ragione di tale appropriatezza risiede, come è noto, nel fatto che nella matematica attuariale si tratta sempre, in sostanza, di calcolare il valore medio di certe variabili casuali, la cui legge di probabilità è determinata da una tavola di mortalità. I due metodi discreto e continuo corrispondono alle due ipotesi più semplici relative ai numeri aleatori in questione; l'integrale di Stjeltjes serve, come è noto, ad unificare i due casi in un unico algoritmo, applicabile anche ai casi più generali (combinazioni di parti continue e discrete, nonchè – caso però meramente teorico [12] – di parti concentrate senza discontinuità in insiemi di misura nulla). Rimaneva però la restrizione della continuità della funzione integranda nei punti di discontinuità della funzione-base; solo togliendo tale restrizione l'unificazione in un unico algoritmo del caso discreto e continuo diventa completa, facendo sì che i procedimenti di inversione di sommazioni che corrispondono nel discreto all'integrazione per parti, nel continuo vengano effettivamente a rientrare come casi particolari nell'applicazione dell'integrazione per parti all'integrale di Stieltjes.

Lo vedremo studiando certe forme di assicurazione su una testa, e mostrando con quanta semplicità si possano riprodurre i ragionamenti e ottenere i risultati recentemente pubblicati da diversi Autori [13].

La funzione-base, per metterci nelle condizioni del metodo discreto, sarà così definita (sott'intendendo l'età iniziale, che sarà sempre x):

---

[12] Cfr. P. LÉVY, *Calcul des probabilités*, Gauthier Villars, Paris, pag. 145.

[13] Cfr. J. F. STEFFENSEN, loc. cit. 1; A. BERGER, *Zur Anwendung der partiellen Summation in der Versicherungsmathematik*, « Ehrenzweigs Assekuranz Jahrbuch », Vol. 54 (1935), pag. 3-12; S. BREUER, *Die Verwertung des Stieltjesschen Integrales zur Darstellung von Renten und Bausparformeln*, « Das Versicherungsarchiv », Vol. 2 (1932), fasc. 8, pag. 1-15.

$$\Phi(\tau) = \frac{L(x) - L(x+\tau)}{L(x)}, \tag{12}$$

ove

$$L(x+\tau) = l_h \quad , \quad h \leq x + \tau < h + 1 \; ,$$

h essendo un numero intero.

Il valore di ogni assicurazione si può allora rappresentare nella forma

$$\mathfrak{M}(\psi) = \int_0^\infty \psi(\tau)\, d\Phi(\tau) \tag{13}$$

e, poichè Φ è continua a destra, l'integrazione per parti sarà applicabile per ψ continua a sinistra, ottenendo così

$$\mathfrak{M}(\psi) = \psi(\tau)\, \Phi(\tau) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \Phi(\tau)\, d\psi(\tau)\,. \tag{14}$$

In particolare ci occuperemo del caso in cui – in analogia alla funzione Φ – la ψ sarà una funzione costante negli intervalli $(h-1\,,\,h)$, ove h è un numero intero ≥ 1.

Indicheremo, seguendo la notazione usuale, con A_x e a_x il premio unico dell'assicurazione vitalizia unitaria per il caso di morte e rispettivamente della rendita vitalizia unitaria, e, come generalizzazione, con A_x^C e a_x^R i valori analoghi relativi a una somma assicurata variabile i cui valori siano $C_1\,, C_2\,, \cdots C_h\,, \cdots$ e, rispettivamente, ad una rendita variabile i cui valori siano $R_1\,, R_2\,, \cdots R_h\,, \cdots$ In base alla formula generale [13], ponendo in essa rispettivamente:

$$\psi(\tau) = \psi_1(\tau)\,, \text{ con } \psi_1(h) = v^h\,, \text{ per } h \geq 0\,, \tag{15a}$$

$$\psi(\tau) = \psi_2(\tau)\,, \text{ con } \psi_2(h) = \begin{cases} 0\,, \text{ per } h = 0\,, \\ \sum_{i=1}^{h} v^{i-1}\,, \text{ per } h \geq 1\,, \end{cases} \tag{15b}$$

$$\psi(\tau) = \psi_1^C(\tau)\,, \text{ con } \psi_1^C(h) = C_h v^h\,, \text{ per } h \geq 0\,, \tag{15c}$$

$$[15d] \qquad \psi(\tau) = \psi_2^R(\tau), \text{ con } \psi_2^R(h) = \begin{cases} 0, & \text{per } h = 0, \\ \sum_{i=1}^{h} R_i v^{i-1}, & \text{per } h \geqq 1, \end{cases}$$

otterremo le seguenti espressioni:

$$[16a] \qquad \mathfrak{M}(\psi_1) = \int_0^\infty \psi_1(\tau)\, d\Phi(\tau) = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} d_{x+h-1}\, v^h = A_x,$$

$$[16b] \qquad \mathfrak{M}(\psi_2) = \int_0^\infty \psi_2(\tau) d\Phi(\tau) = \Phi(\tau) \cdot \psi_2(\tau) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \Phi(\tau)\, d\psi_2(\tau) =$$

$$= \frac{1}{1-v} - \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} (l_x - l_{x+h-1})\, v^{h-1} =$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} l_{x+h-1}\, v^{h-1} = \mathrm{a}_x,$$

$$[16c] \qquad \mathfrak{M}(\psi_1^C) = \int_0^\infty \psi_1^C(\tau) d\Phi(\tau) = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} d_{x+h-1}\, C_h v^h = A_x^C,$$

$$[16d] \qquad \mathfrak{M}(\psi_2^R) = \int_0^\infty \psi_2^R(\tau) d\Phi(\tau) = \Phi(\tau) \psi_2^R(\tau) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \Phi(\tau) d\psi_2^R(\tau) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} R_h v^{h-1} - \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} (l_x - l_{x+h-1})\, R_h v^{h-1} =$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} l_{x+h-1}\, R_h v^{h-1} = \mathrm{a}_x^R.$$

Come casi particolari delle [16*c*] e [16*d*] si hanno ad esempio, rispettivamente, l'assicurazione temporanea per il caso di morte e la rendita temporanea (durata n), ciò che corrisponde a porre nella [16*c*]:

$$C_t = \begin{cases} 1, & \text{per } 0 \leqq t \leqq n, \\ 0 & \text{per} > n, \end{cases}$$

e nella [16*d*]:

$$R_t = \begin{cases} 1 \,, \text{per } 0 \leq t \leq n \,, \\ 0 \quad \text{per } t > n \,. \end{cases}$$

In quest'ultimi due casi la funzione $\psi(\tau)$ è definita nella maniera seguente:

[17*a*] $$\psi(\tau) = \psi_1^{(n)}(\tau) \text{ con } \psi_1^{(n)}(\tau) = \begin{cases} \psi_1(\tau) \text{ per } 0 \leq \tau \leq n \,, \\ 0 \qquad \text{per } \tau > n \,, \end{cases}$$

[17*b*] $$\psi(\tau) = \psi_2^{(n)}(\tau) \,, \text{ con } \psi_2^{(n)}(\tau) = \begin{cases} \psi_2(\tau) \,, \text{per } 0 \leq \tau \leq n \,, \\ \psi_2(n) \,, \text{per } \tau \geq n \end{cases}$$

e tenendo conto delle [16*c*] e [16*d*] si ha:

[18*a*] $$\mathfrak{M}(\psi_1^{(n)}) = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{n} d_{x+h-1} \, v^h = {}_{|n}A_x \,,$$

[18*b*] $$\mathfrak{M}(\psi_2^{(n)}) = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{n} l_{x+h-1} \, v^{h-1} = {}_{n}\text{a}_x \,.$$

Analogamente si ottiene il premio unico per l'assicurazione in caso di vita, rispettivamente per l'assicurazione mista, ponendo:

[17*c*] $$\psi(\tau) = \psi_3^{(n)}(\tau) \,, \quad \text{con} \quad \psi_3^{(n)}(\tau) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \tau \leq n \\ \psi_1(n) \,, & \tau \geq n \end{cases}$$

[17*d*] $$\psi(\tau) = \psi_4^{(n)}(\tau) \,, \quad \text{con} \quad \psi_4^{(n)}(\tau) = \begin{cases} \psi_1(\tau) \,, & 0 \leq \tau \leq n \\ \psi_1(n) \,, & \tau \geq n \,. \end{cases}$$

Infatti si ha

[18*c*] $$\mathfrak{M}(\psi_3^{(n)}) = \int_0^\infty \psi_3^{(n)}(\tau) \, d\Phi(\tau) = \psi_1(n) \int_n^\infty d\Phi(\tau) =$$

$$= \psi_1(n) \, \Phi(\tau) \Big|_n^\infty = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_nE_x \,,$$

e per conseguenza risulta

[18*d*] $$\mathfrak{M}(\psi_4^{(n)}) = \int_0^\infty \psi_4^{(n)}(\tau) \, d\Phi(\tau) = {}_{|n}A_x + {}_nE_x = A_{x,n} \,.$$

7. Come abbiamo già accennato, sono spesso state trattate negli ultimi tempi delle questioni relative ad equivalenze fra assicurazioni vitalizie e rendite vitalizie, che si possono considerare come generalizzazioni della relazione classica

$$[19] \qquad A_x = 1 - d\text{a}_x \qquad (d = 1 - v).$$

Questa nota formula si dimostra subito, osservando che

$$[20] \qquad \psi_1(\tau) = 1 - d\psi_2(\tau).$$

È molto facile dimostrare che si ha in generale

$$[21] \qquad \psi_1^C(\tau) = k - d\psi_2^R(\tau),$$

ove

$$k = \psi_1^C(0) = C_0.$$

Basta infatti determinare i valori R_i uguagliando $C_{h+1}v^{h+1}$ a $k - d\sum_{i=1}^{h+1} R_i v^{i-1}$; si ottiene allora

$$-dR_{h+1}v^h = C_{h+1}v^{h+1} - C_h v^h =$$

$$= C_{h+1}v^h(v-1) + (C_{h+1} - C_h)v^h,$$

per cui

$$-dR_{h+1} = C_{h+1} - C_h - (1-v)C_{h+1}$$

e

$$[22] \qquad R_{h+1} = C_{h+1} - \frac{1}{d}(C_{h+1} - C_h)\ \text{[14]}.$$

Si avrà dunque

$$[23] \qquad A_x^C = k - d\text{a}_x^R$$

dove $k = C_0$ e a_x^R è la rendita vitalizia variabile corrispondente alla assicurazione A_x^C fissata in base alla formula [22].

La classica formula [19] si ottiene dalla [23], ponendo in questa ultima $C_\tau = 1$ per $\tau \geqq 0$, per cui

$$[24] \qquad k = 1 \quad \text{e} \quad R_\tau = 1.$$

[14] A. Berger, loc. cit., [13], pag. 5.

Altri casi particolari, considerati già dai citati autori, sono quelli di assicurazioni a capitale crescente in progressione aritmetica (semplice, o d'ordine superiore $r > 1$) [15].

Nel caso $r = 1$ si ha $C_h = h$ e quindi

$$\mathfrak{M}(\psi) = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} d_{x+h-1} \cdot h \cdot v^h = (IA)_x$$

per cui $k = 0$ e $R_h = h - \frac{1}{d}$ ed in conseguenza

$$\mathfrak{M}(\psi) = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} l_{x+h-1} \cdot v^{h-1} - d \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} l_{x+h-1} \cdot h \cdot v^{h-1} =$$

[25] $$= \text{a}_x - d(I\text{a})_x = (IA)_x .$$

Nel caso $r > 1$ si ponga

$$C_0 = 0 \quad \text{e} \quad C_{h+1} = \binom{h+r}{r} \quad \text{per } h \geqq 0 ,$$

per cui $k = 0$ e

$$R_{h+1} = \binom{h+r}{r} - \frac{1}{d}\left[\binom{h+r}{r} - \binom{h+r-1}{r}\right] =$$

$$= \binom{h+r}{r} - \frac{1}{d}\binom{h+r-1}{r-1} .$$

Da ciò risulta:

$$(I^r A)_x = \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} d_{x+h-1} \binom{h+r-1}{r} v^h =$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} l_{x+h-1} \binom{h+r-2}{r-1} v^{h-1} -$$

[26] $$- d \frac{1}{l_x} \sum_{h=1}^{\infty} l_{x+h-1} \binom{h+r-1}{r} v^{h-1} =$$

$$= (I^{r-1}\text{a})_x - d\,(I^r\,\text{a})_x .$$

---

15) J. F. STEFFENSEN, loc. cit. 1., pag. 466, formula [59].