SULLA LEGGE DI PROBABILITÀ DEGLI ESTREMI

In: *«Metron»*, Roma, 1932, Vol. IX, n. 3-4, pp. 127-138

BRUNO DE FINETTI

Sulla legge di probabilità degli estremi

SUNTO. — Si considera la legge di probabilità del massimo (minimo) valore fra quelli di n variabili casuali indipendenti seguenti la stessa legge, e se ne studia specialmente il comportamento asintotico al crescere di n.

Si usa spesso, fra le caratteristiche salienti di una distribuzione statistica, annoverare i valori estremi fra cui è compresa; si presenta quindi spontanea la domanda se tali estremi possano dare un'indicazione significativa, o se il loro valore sia largamente soggetto al capriccio del caso.

Nel presente lavoro tale questione sarà trattata riferendoci alle variabili casuali; con un po' di precauzione e di buon senso, i risultati potranno anche essere utilizzati per dare, almeno qualitativamente, una risposta alla questione accennata di statistica, o, per dir meglio, un'indicazione di carattere informativo di cui si potrà tener conto nel formarsi un'opinione. La conclusione pratica è che, nel caso di una distribuzione molto numerosa, il valore degli estremi si può determinare con molta probabilità di buona approssimazione purchè la legge di decrescenza della probabilità sia sufficientemente rapida.

1. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono variabili casuali indipendenti soggette a una stessa legge di probabilità, ed è $= p$ la probabilità che una qualunque di esse non superi il valore ξ, sarà p^n la probabilità che nessuna di esse superi il valore ξ. Detta $\Phi(\xi)$ la legge di probabilità (funzione di ripartizione) relativa ad $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sarà allora $\Phi^n(\xi)$ la legge di probabilità della massima, M_n, fra le n variabili $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (a meno eventualmente dei punti di discontinuità, ove deve prendersi la semisomma dei due limiti destro e sinistro).

Se $\Phi(\xi)$ è derivabile, si pone $\dfrac{d}{d\xi}\Phi(\xi) = \varphi(\xi)$, e la $\varphi(\xi)$ si dice densità di probabilità; in tal caso è derivabile anche $\Phi^n(\xi)$, ed è $\varphi_n(\xi) = \dfrac{d}{d\xi}\Phi^n(\xi) = n\,\Phi^{n-1}(\xi)\,\varphi(\xi)$ la densità di probabilità della variabile massima.

~ 1 ~

Ponendo ad esempio

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

risulterà uguale a

$$\varphi_n(\xi)\, d\xi = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right]^{n-1} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi$$

la probabilità che il massimo (in valore relativo) di n errori gaussiani ridotti (origine = valor medio ; unità di misura = scostamento quadratico medio) sia compreso fra $\xi \pm \frac{1}{2} d\xi$ *. La tabella I dà le prime 6 cifre decimali arrotondate dei valori di $\varphi_n(\xi)$ per tutti i valori di ξ di 0,1 in 0,1 fra $-3{,}5$ e $+4$, e per $n = 1, 2, \ldots, 10$ **. Osserviamo che era inutile prolungare la tabella fuori di questi limiti, perchè per $\xi < -3{,}5$, $\xi > 4$, $(n = 2, 3, \ldots, 10)$, si può porre rispettivamente $\varphi_n(\xi) = 0$, $\varphi_n(\xi) = n\,\varphi(\xi)$ con errore che non influisce sulle prime 6 cifre decimali. I valori ottenuti sono illustrati dai diagrammi della Figura.

2. Un fatto che colpisce, osservando tali diagrammi, è che, al crescere di n, essi tendono sempre più a rinserrarsi e innalzarsi, di modo che gran parte dell'area della curva φ_{10} è compresa fra due valori abbastanza vicini dell'ascissa, mentre che la curva φ_1, e in minor misura le successive $\varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_4 \ldots$, sono molto più allargate.

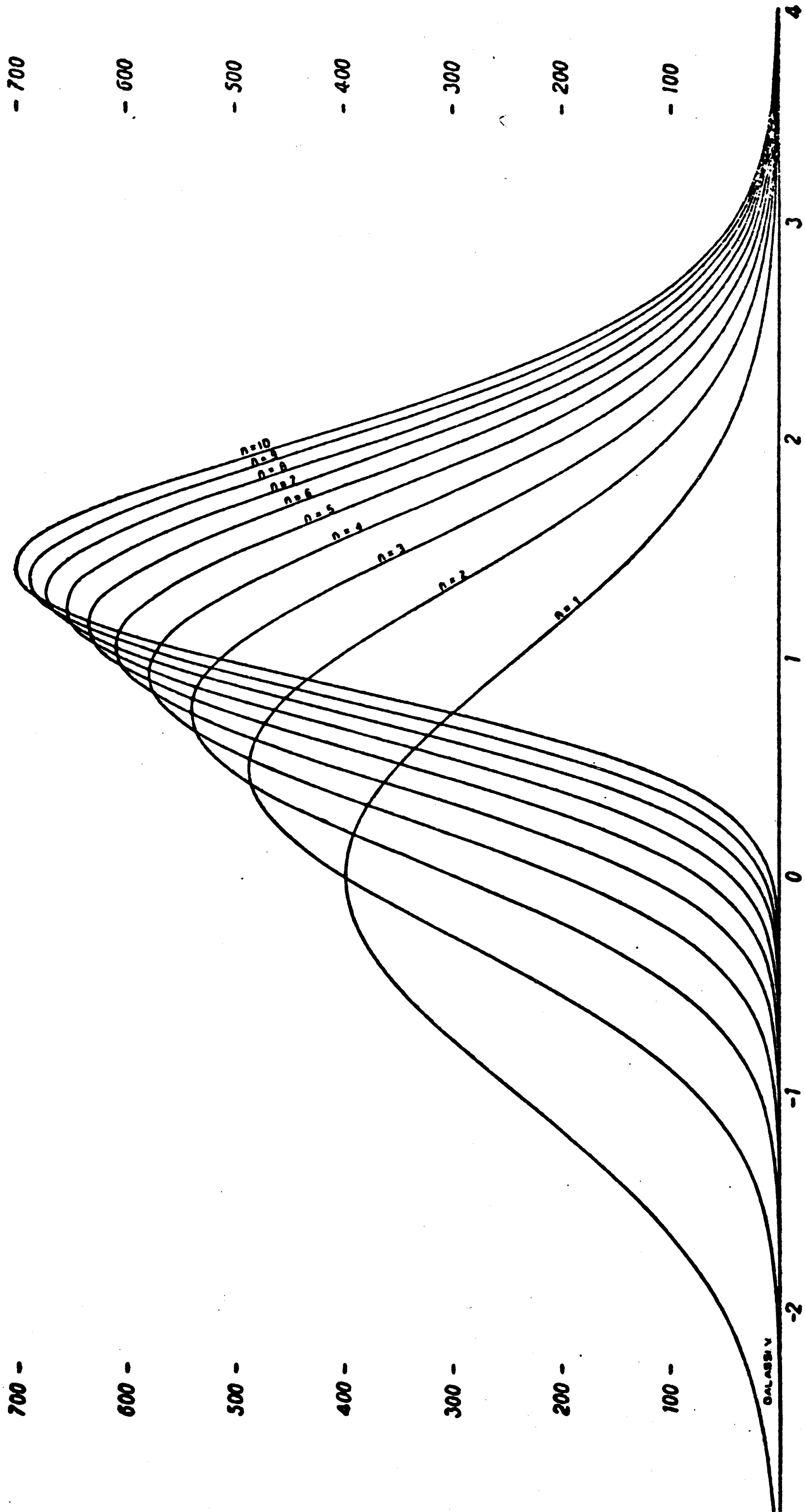
Il fatto è anche interessante perchè, se le curve, al crescere di n, si rinserrano sempre più, vuol dire che il valore della determinazione estrema su n variabili si può prevedere con quanta approssimazione e sicurezza si vuole pur di prendere n sufficientemente grande.

---

* V. es. analoghi in BERTRAND, *Calcul des probabilités*, pp. 198 e sgg. Si noti però che il BERTRAND parla dell'*errore* massimo in valore assoluto, mentre anche quando parliamo del caso particolare della legge normale, che noi prendiamo come esempio, ci riferiamo sempre al *valore* massimo.

** I calcoli sono stati eseguiti servendosi delle Tavole del PEARSON.

~ 2 ~


n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6
n=7
n=8
n=9
n=10
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
100
200
300
400
500
600
700

~ 3 ~

*

Basterebbe evidentemente, in tal caso, calcolare il valore mediano ξ_n della legge Φ^n $\left(\xi_n \text{ tale che } \Phi^n(\xi_n) = \frac{1}{2}, \text{ ossia } \Phi(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$: se esistesse un intervallo di lunghezza ε e con probabilità $1 - \theta\left(> \frac{1}{2}\right)$ di contenere M_n, sarebbe certo che ξ_n vi apparterrebbe, e si avrebbe quindi probabilità non minore di $1 - \theta$ di avere $|M_n - \xi_n| < \varepsilon$. Ossia, pur di fissare n sufficientemente grande, la differenza $|M_n - \xi_n|$ si potrebbe far tendere a zero, nel senso del calcolo delle probabilità. E la tabella che dà i valori di ξ_n relativi a una certa legge Φ darebbe quindi (per n grande) un valore quasi certamente assai prossimo a quello della prova estrema.

La tabella II dà appunto i valori di ξ_n, per un insieme abbastanza esteso di valori di n, relativamente alla legge normale ridotta (valor medio $= 0$, scostamento quadratico medio $= 1$). Dà cioè, per ogni n indicato, il numero ξ_n tale che $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_n} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ (calcolato usando le Tavole del PEARSON).

Un esempio potrà chiarire lo scopo della ricerca.

Consideriamo la frequenza delle estrazioni dei diversi (90) numeri del lotto, nelle otto ruote e nel complesso, dalla fondazione (1682, per la ruota più antica) fino al 1913 *. Essa è una variabile casuale che, essendo il numero m delle estrazioni molto grande, segue praticamente la legge normale di GAUSS (valore medio $p = \frac{5}{90}$, scostamento quadratico medio $\sigma = \sqrt{\frac{5 \times 85}{90^2\, m}}$). Le frequenze dei 90 numeri non sono, in realtà, indipendenti, ma l'interdipendenza è trascurabile. Il valore mediano della massima e della minima frequenza è quindi rispettivamente $p + \xi_{90}\,\sigma$ e $p - \xi_{90}\,\sigma$ ($\xi_{90} = 2{,}4242$); se si verifica la circostanza che l'esame della figura ci ha fatto sembrar verosimile, e che effettivamente in seguito dimostreremo, lo scarto dal valore mediano così determinato dev'essere piccolo, e si può quindi attendere

* I dati sono ricavati da O. DA FIORENZA, *Tutto il gioco del lotto.*

~ 4 ~

con certezza pratica che le frequenze massima e minima abbiano praticamente a coincidere con $p + \xi_{90}\,\sigma$ e $p - \xi_{90}\,\sigma$.

Per la ruota di Palermo, su $m = 4936$ estrazioni, era ad esempio a prevedere in tal senso, come probabile numero massimo e minimo di estrazioni, 313 e 235: effettivamente, degli $n = 90$ numeri, il **19**, numero di massima frequenza, è sortito 313 volte, e il **59** e l'**86**, numeri di frequenza minima, sono sortiti 235 volte. Per le altre ruote e il complesso l'accordo non è così perfetto, ma sempre però soddisfacente, come mostra la tabella che segue.

Numeri di massima e minima frequenza
in un'indagine sul gioco del lotto.

Ruota	Estrazioni m	Scostamento quadratico medio teorico $\sqrt{\frac{5 \times 85}{90^2\, m}}$	Numeri usciti con massima e minima frequenza — Massima: *Frequenza osservata* Frequenza calcolata	*Numero estrazioni* Id. calcolato	Numero	Minima: *Frequenza osservata* Frequenza calcolata	*Numero estrazioni* Id. calcolato	Numero
Bari . . .	2.636	4,461.483	*6829* 6637	*180* 175	**12**	*4173* 4474	*110* 118	**79**
Roma. . .	4.650	3,359.120	*6452* 6370	*300* 296	**45**	*4516* 4741	*210* 220	**63**
Palermo. .	4.936	3,260.351	*6341* 6346	*313* 313	**19**	*4761* 4765	*235* 235	**59,86**
Venezia . .	5.208	3,174.070	*6432* 6325	*335* 329	**22**	*4762* 4786	*248* 249	**32**
Firenze . .	5.455	3,101.377	*6288* 6307	*343* 344	**7,60**	*4895* 4804	*267* 262	**90**
Napoli . .	5.997	2,957.910	*6370* 6273	*382* 376	**6**	*4469* 4838	*268* 290	**70**
Milano . .	6.161	2,918.276	*6265* 6263	*386* 386	**61**	*4658* 4848	*287* 299	**74**
Torino . .	6.767	2,784.543	*6074* 6230	*411* 422	**2**	*4936* 4881	*334* 330	**22,78**
Tutte . . .	41.810	1,120.242	*5932* 5827	*2480* 2436	**12**	*5248* 5284	*2194* 2209	**74**

3. Sembra quindi confermata la speranza di poter dimostrare che $M_n - \xi_n$ tende a zero, nel senso del calcolo delle probabilità, quando $n \to \infty$. È quello che ci proponiamo.

E vedremo infatti che la proprietà che ci interessa è vera se la legge Φ sodisfa una condizione poco restrittiva, che è sodisfatta in particolare per la legge normale di GAUSS.

Escludiamo intanto il caso banale in cui le variabili casuali $X_1 \ldots X_n$ sono limitate superiormente. Se L è il loro limite superiore, cioè il limite inferiore dei valori ξ per cui $\Phi(\xi) = 1$, è ovvio che, al crescere di n, si può addirittura dire che ci si avvicina sempre più alla certezza pratica che il massimo valore ottenuto in n prove coincida praticamente con L. Infatti, qualunque sia $\varepsilon > 0$, è $\Phi(L - \varepsilon) < 1$, e quindi, pur di prendere n sufficientemente grande, si può rendere $[\Phi(L-\varepsilon)]^n$ comunque piccolo.

Supporremo dunque che $\Phi(\xi)$ tenda ad 1 senza mai raggiungerlo, e cercheremo sotto quali condizioni si possa affermare che, fissato comunque $\varepsilon > 0$, la probabilità che sia $|M_n - \xi_n| < \varepsilon$ tenda sempre ad 1, ossia si abbia:

$$(1) \qquad [\Phi(\xi_n + \varepsilon)]^n - [\Phi(\xi_n - \varepsilon)]^n \longrightarrow 1 \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty,$$

equivalente alle due

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} [\Phi(\xi_n - \varepsilon)]^n \longrightarrow 0 \\ [\Phi(\xi_n + \varepsilon)]^n \longrightarrow 1 \end{array}\right\} \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty$$

od anche alle

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{l} n \log \Phi(\xi_n - \varepsilon) \longrightarrow -\infty \\ n \log \Phi(\xi_n + \varepsilon) \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty .$$

Definiamo la funzione $\nu(\xi)$ ponendo

$$[\Phi(\xi)]^{\nu(\xi)} = \frac{1}{2}, \qquad \text{ossia} \qquad \nu(\xi) = -\frac{\log 2}{\log \Phi(\xi)}:$$

avremo allora per definizione $\qquad n = \nu(\xi_n) = -\dfrac{\log 2}{\log \Phi(\xi_n)}$,

e le (3) divengono:

$$(4) \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\log \Phi(\xi_n - \varepsilon)}{\log \Phi(\xi_n)} \longrightarrow \infty \\[2ex] \dfrac{\log \Phi(\xi_n + \varepsilon)}{\log \Phi(\xi_n)} \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty .$$

4. Si osservi che $\nu(\xi) \longrightarrow \infty$ quando $\xi \longrightarrow \infty$, e appare quindi senz'altro che il fatto che, per $\xi \longrightarrow \infty$, l'espressione

$$\frac{\log \Phi(\xi+\varepsilon)}{\log \Phi(\xi)} \qquad (\text{per } \varepsilon \text{ qualunque, } > 0)$$

abbia il minimo (o il massimo) limite nullo, è condizione necessaria (risp. sufficiente), perchè valgano le (4). Riferendoci al caso più semplice, quello in cui esiste il limite: condizione necessaria e sufficiente perchè valga la proprietà che ci interessa è che, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\log \Phi(\xi+\varepsilon)}{\log \Phi(\xi)} = 0. \tag{5}$$

Nel caso che sia Φ derivabile, $\frac{d}{d\xi}\Phi(\xi) = \varphi(\xi)$, possiamo esprimere tale condizione sotto altra forma.

Applicando la regola di L'Hospital:

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\log \Phi(\xi+\varepsilon)}{\log \Phi(\xi)} = \lim_{\xi=\infty} \frac{\dfrac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\Phi(\xi+\varepsilon)}}{\dfrac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}} =$$

$$= \lim_{\xi=\infty} \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(\xi+\varepsilon)} \cdot \lim_{\xi=\infty} \frac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\varphi(\xi)} = \lim_{\xi=\infty} \frac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\varphi(\xi)}$$

(poichè $\lim\limits_{\xi=\infty} \Phi(\xi) = 1$).

Se Φ è derivabile, la condizione si può quindi esprimere:

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\varphi(\xi)} = 0 \qquad (\text{per ogni } \varepsilon > 0). \tag{6}$$

Sotto tale forma è facile vedere che della proprietà di cui ci occupiamo gode in particolare la legge normale.

Ponendo infatti

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

si ha

$$\frac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\varphi(\xi)} = e^{-\frac{1}{2}(\xi+\varepsilon)^2+\frac{1}{2}\xi^2} = e^{-\varepsilon\xi-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$$

e

$$(6^1) \qquad \lim_{\xi=\infty} e^{-\varepsilon\xi-\frac{1}{2}\varepsilon^2} = 0 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0 .$$

5. Rimane a studiare l'ordine di grandezza probabile della differenza $|M_n - \xi_n|$. Ci limiteremo al caso della legge normale (di Gauss), e dimostreremo che è inversamente proporzionale a ξ_n.

Supponiamo infatti nella (6^1) che sia ε variabile, e precisamente $\varepsilon = \frac{u}{\xi}$ (u costante). Ne risulta che

$$e^{-\varepsilon\xi-\frac{1}{2}\varepsilon^2} = e^{-u-\frac{u^2}{2\xi^2}} \longrightarrow e^{-u}$$

e, poichè $\frac{d}{d\xi}(\xi+\varepsilon) = 1 - \frac{u}{\xi^2} \longrightarrow 1$, si ha anche ora

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\log\Phi(\xi+\varepsilon)}{\log\Phi(\xi)} = \lim_{\xi=\infty} \frac{\varphi(\xi+\varepsilon)}{\varphi(\xi)} = e^{-u}$$

e quindi
$$\lim_{\xi=\infty} \left[\Phi(\xi+\varepsilon)\right]^{\nu(\xi)} = e^{-e^{-u}.\log 2}$$

$$\lim_{n=\infty} \left[\Phi\left(\xi_n + \frac{u}{\xi_n}\right)\right]^n = e^{-e^{-u}.\log 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{-u}} .$$

La probabilità che sia $M_n - \xi_n < \frac{u}{\xi_n}$ tende dunque a un limite $\left(\text{e cioè } \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{-u}}\right)$ quando $n \longrightarrow \infty$; in altre parole (*), la legge

(*) Usando l'indovinata espressione del Lévy, possiamo dire che la legge di probabilità di M_n (la successione $\Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots, \Phi^n, \ldots$) tende *verso il tipo* della legge (7); si può anche dire che le curve $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, \ldots$ della figura tendono *ad assumere la forma* della curva d'equazione (8), quando, mediante un'opportuna dilatazione, si compensi lo schiacciamento della curva che altrimenti ne renderebbe la forma stessa di più in più indiscernibile.

TAV. I. — *Probabilità del valore massimo di* n *variabili casuali indipendenti seguenti la legge normale ridotta*

(n = 1, 2, 3, . . . , 10). (Prima parte: Ascisse positive).

ξ	$\varphi_1(\xi)$	$\varphi_2(\xi)$	$\varphi_3(\xi)$	$\varphi_4(\xi)$	$\varphi_5(\xi)$	$\varphi_6(\xi)$	$\varphi_7(\xi)$	$\varphi_8(\xi)$	$\varphi_9(\xi)$	$\varphi_{10}(\xi)$
0,0	**398.942**	398.942	299.207	199.471	124.669	74.801	43.634	24.934	14.025	7.792
1	396.953	428.572	343.033	249.784	168.550	109.186	68.765	42.424	25.765	15.454
2	391.043	453.031	393.634	304.021	220.134	153.018	103.410	68.458	44.612	28.713
3	381.388	471.328	436.858	359.920	277.998	206.134	148.601	104.940	72.949	50.084
4	368.270	482.744	474.602	414.752	339.797	267.252	204.357	153.074	112.869	82.197
5	352.065	**486.880**	504.989	465.574	402.409	333.901	269.360	212.860	165.583	127.216
6	333.225	483.673	526.537	509.510	462.219	402.545	340.837	282.698	230.813	186.125
7	312.254	473.400	538.281	544.049	515.511	468.991	414.711	359.276	306.387	258.058
8	289.692	456.638	**539.845**	567.301	558.894	528.587	486.037	437.791	388.173	339.930
9	266.085	434.219	531.445	**578.170**	589.689	577.381	549.626	512.528	470.466	426.524
1,0	241.971	407.162	513.845	576.427	606.218	612.046	600.765	577.658	546.760	511.127
1	217.852	376.594	488.254	562.687	**607.936**	630.552	635.842	628.091	610.741	586.538
2	194.186	343.682	456.202	538.276	595.421	**632.288**	**652.785**	660.194	657.254	646.249
3	171.369	309.560	419.392	505.059	570.212	618.018	651.225	**672.213**	683.035	685.464
4	149.728	275.272	379.563	465.214	534.556	589.665	632.386	664.362	**687.049**	**701.739**
5	129.518	241.730	338.371	421.020	491.116	549.967	598.763	638.585	670.413	695.138
6	110.921	209.685	297.291	374.667	442.669	502.093	553.675	598.096	635.986	667.927
7	94.049	179.716	257.560	328.108	391.858	449.273	500.793	546.828	587.766	623.969
8	78.950	152.227	220.136	282.969	341.002	394.500	443.713	488.880	530.229	567.965
9	65.616	127.463	185.704	240.495	291.986	340.322	385.640	428.075	467.755	504.803
2,0	53.991	105.525	154.687	201.557	246.215	288.736	329.195	367.664	404.212	438.907
1	43.984	86.396	127.278	166.673	204.619	241.157	276.323	310.156	342.693	373.967
2	35.475	69.963	103.485	136.062	167.712	198.457	228.314	257.302	285.440	312.747
3	28.327	56.046	83.168	109.701	135.656	161.042	185.865	210.142	233.874	257.073
4	22.395	44.422	66.087	87.393	108.346	128.949	149.207	169.125	188.706	207.954
5	17.528	34.839	51.934	68.815	85.485	101.945	118.197	134.243	150.086	165.727
6	13.583	27.039	40.370	53.576	66.658	79.616	95.453	105.168	117.762	130.237
7	10.421	20.770	31.046	41.252	51.386	61.449	71.442	81.365	91.218	101.002
8	7.916	15.791	23.625	31.420	39.175	46.889	54.565	62.200	69.796	77.353
9	5.953	11.883	17.791	23.677	29.541	35.383	41.203	47.002	52.778	58.532
3,0	4.432	8.852	13.260	17.656	22.040	26.412	30.772	35.121	39.458	43.783
1	3.267	6.527	9.781	13.029	16.271	19.506	22.735	25.958	29.174	32.384
2	2.384	4.765	7.142	9.517	11.888	14.255	16.620	18.981	21.339	23.694
3	1.723	3.444	5.163	6.880	8.596	10.311	12.023	13.734	15.444	17.151
4	1.232	2.464	3.694	4.924	6.153	7.381	8.608	9.835	11.060	12.285
5	873	1.745	2.617	3.488	4.360	5.230	6.101	6.970	7.840	8.709
6	612	1.224	1.835	2.446	3.058	3.668	4.279	4.890	5.500	6.110
7	425	850	1.274	1.699	2.123	2.547	2.972	3.396	3.820	4.243
8	292	584	876	1.167	1.459	1.751	2.042	2.334	2.626	2.917
9	199	397	596	795	993	1.192	1.390	1.589	1.788	1.986
4,0	134	268	401	535	669	803	936	1.070	1.204	1.338

~ 9 ~

Segue : TAV. I. — *Probabilità del valore massimo di* n *variabili casuali indipendenti seguenti la legge normale ridotta*

(n = 1, 2, 3, . . ., 10). (Seconda parte: Ascisse negative).

ξ	$\varphi_1(\xi)$	$\varphi_2(\xi)$	$\varphi_3(\xi)$	$\varphi_4(\xi)$	$\varphi_5(\xi)$	$\varphi_6(\xi)$	$\varphi_7(\xi)$	$\varphi_8(\xi)$	$\varphi_9(\xi)$	$\varphi_{10}(\xi)$
— 0,0	398.942	398.942	299.207	199.471	124.669	74.801	43.634	24.934	14.025	7.792
1	396.953	365.333	252.174	154.725	89.000	49.146	26.385	13.876	7.184	3.673
2	391.043	329.055	207.670	116.500	61.270	30.935	15.185	7.302	3.456	1.616
3	381.388	291.448	167.038	85.098	40.644	18.635	8.307	3.628	1.559	662
4	368.270	253.796	131.179	60.268	25.959	10.734	4.315	1.699	659	252
5	352.065	217.251	100.545	41.363	15.952	5.906	2.126	750	260	89
6	333.225	182.776	75.190	27.495	9.426	3.102	993	311	96	29
7	312.254	151.108	54.844	17.694	5.352	1.554	439	121	33	9
8	289.692	122.745	39.006	11.018	2.918	742	183	44	11	3
9	266.085	97.951	27.043	6.637	1.527	337	72	15	3	1
— 1,0	241.971	76.780	18.272	3.865	767	146	27	5	1	
1	217.852	59.110	12.029	2.176	369	60	10	1		
2	194.186	44.690	7.714	1.183	170	24	3			
3	171.369	33.177	4.817	622	75	9	1			
4	149.728	24.183	2.929	315	32	3				
5	129.518	17.305	1.734	154	13	1				
6	110.921	12.157	999	73	5					
7	94.049	8.383	560	33	2					
8	78.950	5.673	306	15	1					
9	65.616	3.768	162	6						
— 2,0	53.991	2.457	84	3						
1	43.984	1.571	42	1						
2	35.475	986	21							
3	28.327	608	10							
4	22.395	367	5							
5	17.528	218	2							
6	13.583	127								
7	10.421	72								
8	7.916	40								
9	5.953	22								
— 3,0	4.432	12								
1	3.267	6								
2	2.384	3								
3	1.723	2								
4	1.232	1								
5	873									

TAV. II. — *Valore mediano della massima tra* n *variabili casuali indipendenti seguenti la legge normale ridotta.*

(Prima parte: n da 1 a 1.000).

n	ξ_n	n	ξ_n	n	ξ_n	n	ξ_n
1	0,0000	26	1,9381	60	2,2739	310	2,8431
2	5450	27	9540	70	3319	320	8532
3	8193	28	9695	80	3812	330	8630
4	9981	29	9842	90	4242	340	8723
5	1,1290	30	9983	100	4621	350	8816
6	2313	31	2,0120	110	4960	360	8903
7	3149	32	0251	120	5266	370	8990
8	3852	33	0378	130	5544	380	9073
9	4458	34	0500	140	5801	390	9154
10	4988	35	0619	150	6038	400	9235
11	5459	36	0734	160	6254	410	9311
12	5882	37	0845	170	6463	420	9383
13	6265	38	0953	180	6656	430	9454
14	6615	39	1057	190	6836	440	9529
15	6937	40	1159	200	7007	450	9598
16	7235	41	1257	210	7169	460	9665
17	7512	42	1353	220	7322	470	9731
18	7771	43	1447	230	7468	480	9796
19	8014	44	1538	240	7607	490	9859
20	8242	45	1626	250	7741	500	9922
21	8457	46	1713	260	7867	600	3,0472
22	8661	47	1797	270	7989	700	0933
23	8854	48	1880	280	8107	800	1328
24	9038	49	1960	290	8219	900	1670
25	9213	50	2039	300	8328	1000	1983

(Seconda parte: n da 1.000 a 900.000.000).

n = cifra in testa alla colonna × × potenza di 10 in testa alla riga	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9
1.000	3,19	3,24	3,31	3,39	3,45	3,50	3,57	3,63	3,68	3,72	3,75	3,78
10.000	3,81	3,85	3,90	3,97	4,03	4,07	4,14	4,19	4,23	4,26	4,29	4,32
100.000	4,34	4,38	4,43	4,49	4,54	4,58	4,64	4,68	4,72	4,75	4,78	4,80
1.000.000	4,82	4,86	4,90	4,96	5,00	5,04	5,09	5,13	5,17	5,20	5,22	5,24
10.000.000	5,26	5,30	5,34	5,39	5,43	5,46	5,51	5,55	5,58	5,61	5,63	5,65
100.000.000	5,67	5,70	5,74	5,79	5,83	5,85	5,90	5,94	5,97	5,99	6,01	6,03

di probabilità della variabile casuale $\xi_n | M_n - \xi_n |$ tende, per $n \to \infty$, alla legge per cui

$$\Phi(\xi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{e^{-\xi}}, \tag{7}$$

ossia

$$\varphi(\xi) = \log 2 \, . \, e^{-(\xi + \log 2 \, . \, e^{-\xi})} \, . \tag{8}$$

Per $u = \pm 1$ risulta $\left(\frac{1}{2}\right)^e = 0{,}152$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/e} = 0{,}775$, ed è quindi $0{,}775 - 0{,}152 = 0{,}513$, e cioè un po' più di mezzo, il limite della probabilità che sia $|M_n - \xi_n| < \frac{1}{\xi_n}$. Il valore mediano dello scarto $|M_n - \xi_n|$ è quindi, per n grande, poco meno di $\frac{1}{\xi_n}$, e potremo dire, in breve, che tale scarto è dell'ordine di grandezza di $\frac{1}{\xi_n}$.

Nell'esempio riportato, dei numeri di minima e massima frequenza nel gioco del lotto, lo scarto è minore di $\frac{1}{\xi_n}$ in 11 casi su 18. I sette casi in cui lo scarto è maggiore sono: Torino mass. (numero **2**); Bari mass. (**12**); Milano min. (**74**); Roma min. (**63**); Bari min. (**79**); Tutte mass. (**12**); Napoli min. (**70**).