SULLA DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI UNA CURVA LOGISTICA

In: *«Annali di Statistica»*, Roma, 1931, Serie VI, Vol. X,

pp. 3-11

7

ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA
DEL REGNO D'ITALIA

BRUNO DE FINETTI

SULLA DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI UNA CURVA LOGISTICA

(*Estratto dal volume*: CORRADO GINI e BRUNO DE FINETTI - Calcoli sullo sviluppo futuro della popolazione italiana - « Annali di Statistica », Serie VI, Vol. X - Roma, 1931-IX — Prezzo L. 12)

ROMA
ISTITUTO POLIGRAFICO DELLO STATO
LIBRERIA
1931 - ANNO IX

SULLA DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI UNA CURVA LOGISTICA

NOTA I. — Interpolazione di una logistica dato l'asintoto inferiore (nullo) e tre ordinate equidistanti (Metodo *a*).

Si tratta di determinare i parametri della curva logistica con asintoto inferiore nullo, note le ordinate in tre punti equidistanti (che indicheremo $y_0\ y_1\ y_2$).

Sistema d'equazioni: da $y\,(t) = \dfrac{C}{A\,e^{-a\,t} + 1}$ si ricava:

$$y_0 = \frac{C}{A + 1}$$

$$y_1 = \frac{C}{A\,e^{-a} + 1}$$

$$y_2 = \frac{C}{A\,(e^{-a})^2 + 1}$$

$$A + 1 = \frac{C}{y_0} \qquad A\,e^{-a} + 1 = \frac{C}{y_1} \qquad A\,(e^{-a})^2 + 1 = \frac{C}{y_2}$$

$$1 + \frac{1}{A} = \frac{C}{A\,y_0} \qquad e^{-a} + \frac{1}{A} = \frac{C}{A\,y_1} \qquad (e^{-a})^2 + \frac{1}{A} = \frac{C}{A\,y_2}$$

$$1 - e^{-a} = \frac{C}{A}\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1}\right) \qquad e^{-a}\,(1 - e^{-a}) = \frac{C}{A}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right)$$

$$e^{-a} = \frac{\dfrac{1}{y_1} - \dfrac{1}{y_2}}{\dfrac{1}{y_0} - \dfrac{1}{y_1}} = \frac{y_0\,(y_2 - y_1)}{y_2\,(y_1 - y_0)}.$$

Abbiamo così determinato e^{-a}, ossia a. Determiniamo ora C.

$$e^{-a}\,A + e^{-a} = \frac{C}{y_0}\,e^{-a}$$

$$e^{-a}A + 1 = \frac{C}{y_1}$$

$$1 - e^{-a} = C\left(\frac{1}{y_1} - \frac{e^{-a}}{y_0}\right)$$

$$C = \frac{y_0\,y_1\,(1 - e^{-a})}{y_0 - y_1\,e^{-a}}.$$

E finalmente

$$A = \frac{C}{y_0} - 1.$$

Perchè $y(t)$ sia reale occorre e basta che e^{-a} sia reale e positivo, e dev'essere quindi $y_0 y_2 (y_2 - y_1)(y_1 - y_0) > 0$. Dev'essere cioè y_1 compreso fra y_0 e y_2 (andamento monotono) se y_0 e y_2 hanno lo stesso segno, come avviene certamente nel caso pratico che ci interesssa, ove le y sono essenzialmente positive. Se invece y_0 e y_2 avessero segno opposto, y_1 dovrebbe essere non compreso fra di essi.

Supposta la logistica reale, sono da distinguere due casi: se $A \geqq 0$, è

$$Ae^{-at} + 1 \geqq 1 \text{ (qualunque sia } t)$$

e

$$y(t) \leqq C \text{ (asintoto superiore).}$$

Se invece $A < 0$, $Ae^{-at} + 1 = 0$ per $t = t_0 = \frac{1}{a} \log |A|$ e $y(t)$ ha un polo per $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty.$$

Per avere il primo caso (potremo dire: una logistica limitata) occorre e basta che sia

$$A = \frac{C}{y_0} - 1 \geqq 0, \qquad \text{ossia } \frac{C}{y_0} \geqq 1.$$

e essendo

$$C = y_0 \frac{y_1(1 - e^{-a})}{y_0 - y_1 e^{-a}}, \qquad \frac{y_1(1 - e^{-a})}{y_0 - y_1 e^{-a}} > 1$$

$$\frac{y_1 - y_0}{y_0 - y_1 e^{-a}} + \frac{y_0 - y_1 e^{-a}}{y_0 - y_1 e^{-a}} = \frac{y_1 - y_0}{y_0 - y_1 e^{-a}} + 1 > 1$$

$$\frac{y_1 - y_0}{y_0 - y_1 e^{-a}} > 0.$$

Sostituendo ad e^{-a} il suo valore e semplificando si ha

$$y_0 y_2 [y_1^2 - y_0 y_2] > 0;$$

se y_0 e y_2 hanno segni contrari la logistica non può non essere illimitata, e dobbiamo supporre quindi $y_0 y_2 > 0$, e in tal caso $y_1 \, y_2 \, y_3$ devono avere lo stesso segno, e la condizione perchè la logistica risulti limitata é allora

$$y_1^2 > y_0 y_2 \qquad |y_1| > \sqrt{y_0 y_2}.$$

Perchè la logistica sia limitata $y_0 \, y_1 \, y_2$ devono avere lo stesso segno e y_1 deve superare in valore assoluto la media geometrica di y_0 e y_2.

NOTA II. — Interpolazione di una logistica date quattro ordinate equidistanti (Metodo *b*).

Si tratta di determinare i parametri della curva logistica di cui non è noto l'asintoto inferiore, note le ordinate in quattro punti equidistanti (che indicheremo $y_0\ y_1\ y_2\ y_3$) . Sia

$$y = K + \frac{C}{1 + A\,e^{-\alpha t}}\,.$$

Indichiamo per brevità $e^{-\alpha} = a$; avremo

$$y_0 = K + \frac{C}{1+A}$$

$$y_1 = K + \frac{C}{1+Aa}$$

$$y_2 = K + \frac{C}{1+Aa^2}$$

$$y_3 = K + \frac{C}{1+Aa^3}$$

Eliminando K:

$$y_1 - y_0 = C\left(\frac{1}{1+Aa} - \frac{1}{1+A}\right)$$

$$y_2 - y_1 = C\left(\frac{1}{1+Aa^2} - \frac{1}{1+Aa}\right)$$

$$y_3 - y_2 = C\left(\frac{1}{1+Aa^3} - \frac{1}{1+Aa^2}\right)$$

Eliminando C:

$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{\dfrac{1}{1+Aa} - \dfrac{1}{1+A}}{\dfrac{1}{1+Aa^2} - \dfrac{1}{1+Aa}} =$$

$$= \frac{(1+A) - (1+Aa)}{(1+Aa) - (1+Aa^2)} \cdot \frac{1+Aa^2}{1+A} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1+Aa^2}{1+A}\,.$$

Posto
$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_1} = M$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1+Aa^2}{1+A} = M.$$

Analogamente

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{\dfrac{1}{1+Aa^2} - \dfrac{1}{1+Aa}}{\dfrac{1}{1+Aa^3} - \dfrac{1}{1+Aa^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1+Aa^3}{1+Aa}.$$

Posto
$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = N$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1+Aa^3}{1+Aa} = N.$$

Dalle
$$\frac{1+Aa^2}{1+A} = aM \qquad\qquad \frac{1+Aa^3}{1+Aa} = aN$$

si tratta di ricavare a ed A.

Cominciamo col ricavare A:

$$1 + Aa^2 = aM\,(1+A) \qquad\qquad 1 + Aa^3 = aN\,(1 + Aa)$$

$$A\,(a^2 - aM) = aM - 1 \qquad\qquad A\,(a^3 - a^2N) = aN - 1$$

$$A = \frac{a\,M - 1}{a\,(a - M)} = \frac{a\,N - 1}{a^2\,(a - N)}$$

Otteniamo un'unica equazione in a

$$\frac{aM - 1}{a\,(a - M)} = \frac{a\,N - 1}{a^2\,(a - N)}$$

ossia

$$a^2\,(a\,M - 1)\,(a - N) - a\,(a\,N - 1)\,(a - M) = 0$$

o anche (essendo $a \neq o$)

$$a\,(a\,M - 1)\,(a - N) - (a\,N - 1)\,(a - M) = 0$$

$$M\,a^3 - (1 + M\,N + N)\,a^2 + (1 + M\,N + N)\,a - M = 0.$$

L'equazione ammette ovviamente la radice $a = 1$, che possiamo senz'altro escludere (altrimenti si avrebbe $y\,(t)$ = costante). Si ha allora, dividendo per $(a - 1)$

$$M\,\frac{a^3 - 1}{a - 1} - (1 + M\,N + N)\,\frac{a^2 - a}{a - 1} =$$

$$= M\,(a^2 + a + 1) - (1 + M\,N + N)\,a = M\,a^2 - (1 + M\,N + N - M)\,a + M$$

e quindi ($M \neq o$)

$$a^2 - \frac{1 + MN + N - M}{M} a + 1 = 0$$

$$a^2 - \left[\frac{(1+N)(1+M)}{M} - 2\right] a + 1 = 0.$$

Le radici di quest'equazione (reciproca) sono:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1}$$

ove $$c = \frac{(1+N)(1+M)}{M} - 2 = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} - 2.$$

In base alle due radici si ottengono due sistemi di parametri:

$$a_1 = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1} = e^{-\alpha_1} \qquad a_2 = \frac{1}{a_1} = e^{-\alpha_2} \qquad (\alpha_2 = -\alpha_1)$$

$$A_1 = \frac{M a_1 - 1}{a_1 (a_1 - M)} \qquad A_2 = \frac{1}{A_1}$$

$$C_1 = \frac{y_1 - y_0}{\dfrac{1}{1 + a_1 A_1} - \dfrac{1}{1 + A_1}} \qquad C_2 = -C_1$$

$$K_1 = y_0 - \frac{C_1}{1 + A_1} \qquad K_2 = K_1 + C_1;$$

ma è da osservare che i due sistemi di parametri determinano la medesima equazione. Infatti:

$$K_2 + \frac{C_2}{1 + A_2 e^{-\alpha_2 t}} = K_1 + C_1 - \frac{C_1}{1 + \dfrac{1}{A_1} e^{\alpha_1 t}} =$$

$$= K_1 + C_1 \frac{\left(1 + \dfrac{1}{A_1} e^{-\alpha_1 t}\right) - 1}{1 + \dfrac{1}{A_1} e^{\alpha_1 t}} = K_1 + \frac{C_1}{1 + A_1 e^{-\alpha_1 t}}.$$

L'equazione è quindi pienamente e univocamente determinata. Occorre però, per il caso che ci interessa, che $y(t)$ sia funzione *reale*, e per ciò occorre e basta che siano *reali e positive* le radici a_1 e a_2 del-'equazione

$$a^2 - ac + 1 = 0$$

e dev'essere cioè $\qquad c^2 > 4, \qquad c > 0$

ossia $\qquad c > 2$ (1)

il che significa $\qquad \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_0} > 4.$

Sotto altra forma, se indichiamo con u e v gli incrementi della popolazione nel primo e nel terzo intervallo, e con w quello dell'intervallo centrale (2):

$$u = y_1 - y_0, \qquad w = y_2 - y_1, \qquad v = y_3 - y_2$$

si ha la condizione $\qquad (u + w)\,(v + w) > 4\,uv \qquad$ se $uv > 0$,

$\qquad (u + w)\,(v + w) < 4\,uv \qquad$ se $uv < 0$,

ossia $\qquad w^2 + (u + v)\,w - 3\,uv \gtrless 0 \qquad$ ($>$ se $uv > 0$, $<$ se $uv < 0$).

Perchè la $w^2 + (u+v)\,w - 3\,uv = 0$, considerata come equazione in w, abbia radici reali e distinte, occorre e basta che sia $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + 3\,uv > 0$, ciò che avviene sempre se $uv > 0$, e che nel caso contrario avviene se e soltanto se uno dei due numeri u e v è in valore assoluto più di $(7 + \sqrt{48}) = 13{,}928$ volte maggiore dell'altro.

Il caso in cui non esistono due radici reali e distinte va senz'altro escluso, non potendo allora verificarsi la nostra condizione; supponiamo quindi che esistano, e siano W_1 e W_2. Esse poi hanno segno contrario se $uv > 0$; se invece è $uv < 0$ hanno lo stesso segno, e precisamente il segno del minore, in valore assoluto, fra i due numeri u e v (che, rammentiamo, è oltre 13 volte minore dell'altro); nel primo caso, perchè la logistica sia reale, w deve risultare esterno all'intervallo $W_1\,W_2$, nel secondo interno.

Queste le condizioni perchè la logistica sia reale; ma interessa ancora distinguere se è *limitata* o *illimitata*; per questa nuova ricerca dobbiamo studiare l'andamento di una logistica reale e vedere il significato dei due diversi sistemi di parametri che la determinano.

---

(1) Abbiamo scritto $>$ e non $\geqq$ perchè, se $c = 2$, $a_1 = a_2 = 1$, e risulterebbe $y =$ costante: non si avrebbe cioè nessuna funzione del tipo cercato.

(2) Si osservi che, mediante u, v, w, si può esprimere

$$c = \frac{(u + w)\,(v + w)}{u\,v} - 2, \quad M = \frac{u}{w}, \quad N = \frac{w}{u}.$$

Dalla $$y(t) = K + \frac{C}{1 + A e^{-at}}$$

scende
$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = \begin{cases} K & a > 0 \\ K + C & a < 0 \end{cases}$$
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{cases} K + C & a > 0 \\ K & a < 0 \end{cases}$$

Scegliere l'uno o l'altro dei due sistemi di parametri significa semplicemente riferirsi all'asintoto inferiore o superiore. Stabilendo che K debba rappresentare l'asintoto per $t \to -\infty$, si deve scegliere $a > 0$ e quindi $e^{-a} < 1$, ossia quella delle due radici (reciproche) a_1 e a_2 che è < 1. Ciò supporremo sempre in seguito tacitamente stabilito, cosicchè sia $a > 0$.

È allora e^{-at} funzione decrescente, e di conseguenza $y(t)$ funzione crescente o decrescente a seconda che A e C hanno segni uguali o contrari. Se $A > 0$ la logistica è limitata, e passa sempre crescendo (se $C > 0$; se $C < 0$ sempre decrescendo) da K a $K + C$ al variare di t da $-\infty$ a $+\infty$. Se $A < 0$, la logistica è illimitata, e ha precisamente un polo per $t \to t_0 = = \frac{1}{a} \log |A|$; se $C < 0$, y varia, sempre crescendo, da K a $+\infty$ e da $-\infty$ a $K + C$ al variare di t da $-\infty$ a t_0 e da t_0 a $+\infty$; se $C > 0$ decresce al contrario da K a $-\infty$ e da $+\infty$ a $K + C$. Ne segue che l'incremento $y(t_2) - y(t_1)$ di y in un intervallo t_1, t_2 $(t_2 > t_1)$ ha il segno di AC se nell'intervallo non esiste un polo (e cioè sempre quando la logistica è limitata, e, se è illimitata, quando il polo è esterno all'intervallo) e ha segno contrario nel caso opposto.

Consideriamo ora i tre incrementi u, v, w, supponendo naturalmente che sodisfino le restrizioni trovate affinchè la logistica risulti reale. O essi hanno lo stesso segno, o uno ha segno contrario degli altri due. In questo secondo caso la logistica è illimitata, ha un polo nell'intervallo corrispondente all'incremento di segno contrario agli altri, è crescente o decrescente a seconda che sono due gli incrementi positivi o quelli negativi. Nel primo caso la logistica o è limitata, o è illimitata ma ha il polo esterno al periodo considerato (da quella parte ove si ha l'incremento maggiore), e in ogni caso è crescente o decrescente a seconda del segno, positivo o negativo, degli incrementi.

Distinguiamo i vari casi. Se u e v hanno segno contrario $(uv < 0)$, e uno di questi due numeri è in valore assoluto più di $(7 + \sqrt{48})$ volte maggiore dell'altro (altrimenti per nessun valore di w nessuna logistica reale esiste), w dev'essere compreso fra $-\frac{1}{2}(u + v) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(u + v)^2 + 12\, uv}$, e ha quindi il segno del minore, in valore assoluto, fra i due numeri u e v. Ne consegue che la logistica è illimitata, ha il polo nel primo intervallo o nel terzo, e precisamente in quello che ha l'incremento maggiore in valore assoluto (e cioè nel primo se $|u|>|v|$, nel terzo se $|v|>|u|$), è crescente o decrescente a seconda che è positivo o negativo il minore in valore assoluto dei due incrementi u e v.

Se u e v hanno lo stesso segno ($uv > 0$), w dev'essere o maggiore di

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \sqrt{(u+v)^2 + 12\,uv} - \tfrac{1}{2}(u+v),$$

o minore di

$$W_2 = -\tfrac{1}{2} \sqrt{(u+v)^2 + 12\,uv} - \tfrac{1}{2}(u+v).$$

Ricordiamo che le due radici hanno ora segni contrari, tali due condizioni corrispondono a due casi distinti. L'ipotesi che dà a w il segno contrario a quelli di u e v dà luogo a una logistica illimitata col polo nell'intervallo centrale (il secondo); quella che dà a w lo stesso segno di u e v, a una logistica o limitata o col polo esterno al periodo considerato (primo, secondo e terzo intervallo). In ogni caso poi la logistica è crescente o decrescente a seconda che u e v sono positivi o negativi.

Non rimane ormai che a distinguere quando la logistica è limitata, e quando non lo è, ma ha il polo esterno al periodo considerato, casi questi corrispondenti entrambi, come s'è visto, all'ipotesi che u, v, w abbiano lo stesso segno e w sia, in valore assoluto, maggiore di

$$W_0 = \tfrac{1}{2} \sqrt{(u+v)^2 + 12\,uv} - \tfrac{1}{2}\,|u+v|$$

(indichiamo cioè con W_0 il valore assoluto di quella fra le radici W_1 e W_2 che ha lo stesso segno di u e v).

Perchè la logistica sia limitata sappiamo essere necessario e sufficente che risulti $A > 0$; essendo $A = (M - a_2)/(a_1 - M)$, ciò equivale a dire che M dev'essere compreso fra le radici a_1 e a_2, ossia che $a^2 - ac + 1$ risulta negativo per $a = M$. Sostituendo:

$$M^2 - (1 + MN + N - M) + 1 = (M - N)\,(M+1) < 0,$$

ossia $M < N$, $u/w < w/v$, $|w| > W = \sqrt{uv}$ (1).

Questa condizione implica la precedente, essendo sempre

$$W = \sqrt{uv} \geqq W_0.$$

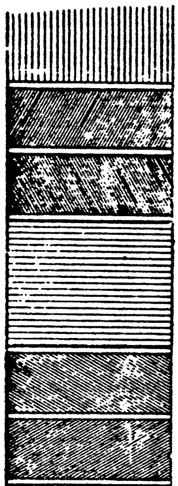
Pongasi infatti $H = \tfrac{1}{2}|u+v|$, e si ricordi che $H \geqq W$, per note proprietà delle medie. Si ha allora ovviamente $2HW \geqq 2W^2$, $(H+W)^2 = H^2 + 2HW + W^2 \geqq H^2 + 3W^2$, $W \geqq \sqrt{H^2+3W^2} - H = W_0$, *c. v. d.* Il segno $=$ vale poi soltanto per $u = v$ (e allora $W = |u| = |v|$), oltre che per il caso, da escludersi, $uv = 0$.

---

(1) Se $|w| = \sqrt{uv}$ la logistica degenera in un'esponenziale.

La logistica risulta quindi, riassumendo:

reale	limitata				$\lvert w\rvert > \sqrt{uv}$	
	illimitata; polo	esterno al periodo considerato: prima	u e v stesso segno	w dello stesso segno di u e v	$\frac{1}{2}\sqrt{(u+v)^2+12uv}-\frac{1}{2}\lvert u+v\rvert<\lvert w\rvert<\sqrt{uv}$	$\lvert u\rvert>\lvert v\rvert$
		esterno al periodo considerato: dopo				$\lvert v\rvert>\lvert u\rvert$
		nell'intervallo centrale		w di segno contrario a u e v	$\lvert w\rvert>\frac{1}{2}\sqrt{(u+v)^2+12uv}+\frac{1}{2}\lvert u+v\rvert$	
		nel primo intervallo	u e v segno contrario	$\lvert u\rvert>(7+\sqrt{48})\lvert v\rvert$	w tra $-\frac{1}{2}(u+v)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(u+v)^2+12uv}$	
		nel terzo intervallo		$\lvert v\rvert>(7+\sqrt{48})\lvert u\rvert$		



imaginaria — in ogni altro caso e cioè:

u e v stesso segno, w tra $-\frac{1}{2}(u+v)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(u+v)^2+12uv}$;

u e v segno opposto e:

w qualunque, se {rapporto del maggiore al minore tra $\lvert u\rvert$ e $\lvert v\rvert$} $<7+\sqrt{48}$;

w non compreso tra $-\frac{1}{2}(u+v)\pm\sqrt{(u+v)^2+12uv}$ nel caso opposto

Si vedrebbe poi facilmente che, rappresentando cartesianamente i sistemi di parametri u, v, w, i diversi casi corrispondono alle regioni in cui lo spazio è diviso dai due coni (col vertice nell'origine) d'equazione

$$w^2 - uv = 0$$

e

$$w^2+(u+v)\,w-3\,uv=0$$

e dai due piani $u=0$, $v=0$. La figura qui a fianco ne dà la sezione col piano $u+v=2$. I diversi tratteggi corrispondono alle diverse ipotesi, come appare dal confronto colla precedente tabella, a fianco della quale sono riprodotti.