SUL CONCETTO DI PROBABILITÀ

In: *«Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza»*, Bologna, 1933, Anno V, n. 4, pp. 723-747

BRUNO DE FINETTI

SUL CONCETTO DI PROBABILITÀ

1. — Ogni persona fa delle congetture, e sulle loro probabilità sa giudicare, ragionare, regolare i propri atti e i propri interessi: è questa, tra le nostre facoltà logiche, quella che nella vita pratica ci è più costantemente e più essenzialmente d'ausilio. Nessuno, credo, lo disconoscerà, nè tanto meno l'economista, lo statistico, il finanziere, specie se non si limita a freddamente osservare e catalogare fatti compiuti, ma li studia vivendoli, e della vita sa ascoltare le voci.

Che cos'è, ad esempio, un preventivo? È un calcolo fatto in base a congetture, previsioni, valutazioni, che ci appaiono probabili. Togliete questo elemento psicologico essenziale, e non rimarrà che una vana esercitazione aritmetica, senz'altro valore che quello meramente esemplificativo. Rimarranno null'altro che dei conteggi comprovanti che, supponendo *a mo' d'esempio* che una fabbrica di cui si progetta l'istituzione possa costare tanto d'impianto, produrre tanto e a tale prezzo di costo, e che si giunga a uno smercio di tanto a tal prezzo, darebbe un determinato utile. Ma su un esempio, fatto null'altro che a mo' d'esempio, nessuno ci si baserebbe come su di un preventivo: è indiscutibile che, chi sapesse costruire in un'ora un'automobile con la spesa di trenta lire e trovasse subito da venderla per 100 mila, potrebbe diventare milionario in una giornata; ma è altrettanto certo che nessuno dei lettori sarà allettato da un « preventivo esemplificativo » di questo genere a farsi costruttore di automobili. Mentre invece un calcolo analogo, ma dove i dati appaiano verosimili, ha, per chi voglia decidere un'impresa, un'importanza fondamentale.

Nè è a dire che l'inverosimiglianza o verosimiglianza siano solo una conseguenza della maggiore o minore distanza delle condizioni assunte come ipotesi dalle condizioni effettive riscontrate in aziende e circostanze analoghe. Tale obiezione sarebbe essenziale, perchè, se fosse giusta, la ragione determinante del valore di un preventivo, anzichè un carattere psicologico, avrebbe un carattere empirico positivo. Ma un simile criterio positivo sarebbe evidentemente troppo semplicista: il fatto che le ipotesi siano vicine alle condizioni effettive di aziende analoghe non ha importanza per sé stesso, ma, se mai, in quanto esso sembri verosimile. Supponiamo infatti, per fare l'esperimento cruciale, che per un'impresa nuova, in un determinato istante, si ritengano verosimili delle condizioni di sviluppo molto diverse da quelle delle imprese analoghe preesistenti: è indubbio che per un preventivo ci si baserebbe sulle condizioni verosimili, benchè inconsuete, e non su quelle che, pure essendo consuete, sono pel caso in questione inverosimili. Questo caso è ben frequente in pratica, e le ragioni che guidano in questa valutazione di verosimiglianza o di probabilità possono essere diversissime e non hanno affatto bisogno di derivare da un preciso criterio positivo: il loro valore deriva dall'apprezzamento psicologico che se ne fa.

Un simile concetto psicologico di probabilità non solo non è stato inventato dai matematici, ma anzi non è neanche stato da essi esaminato e studiato in tutta la sua profondità e la sua ricchezza: i matematici hanno sempre, chi più chi meno, voluto limitare il campo del calcolo delle probabilità, quasi temessero che l'introduzione di un elemento così vivo e così genuino nelle loro formule vi potesse portare chissà quale scompiglio.

Per molto tempo quindi la definizione di probabilità fu limitata al campo di quei problemi piuttosto artificiosi e schematici, dove — potendosi riconoscere una divisione in un numero finito di « casi possibili » che, per ragioni di *simmetria*, si ritengono « ugualmente probabili » — si introduce la nota espressione della probabilità come rapporto fra un numero di casi favorevoli e possibili. E l'estensione ai problemi esterni a tale campo speciale, estensione che si presenta per sè stessa spontanea, era fatta più o meno tacitamente, con giustificazioni più o meno vaghe ispirate a criteri di analogia, con limitazioni più o meno vaghe relativamente alla sua legittimità.

Successivamente si ebbero vari tentativi per fondare il calcolo delle probabilità su basi più convincenti conservando però intatto il carattere puramente aritmetico, almeno apparentemente del tutto extra-psicologico, della definizione pratica. A mio giudizio, ogni tentativo fatto con tali intendimenti è necessariamente votato all'insuccesso, perchè ciò che si propone è di snaturare il concetto che considera, di sradicarlo dal terreno donde solo ritrae vita e vigore e dal quale non possiamo pensarlo avulso senza che avvizzisca e si svuoti di un significato qualsiasi. Possiamo constatarlo su due dei tentativi più seri e più recenti: voglio parlare della teoria ampiamente svolta dal Kamke (1) e di quella abbozzata dal Cantelli (2).

(1) E. Kamke, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* (S. Hirzel in Leipzig, 1932, RM. 10).

(2) F. P. Cantelli, *Una teoria astratta del calcolo delle probabilità* « Giorn. Ist. Ital. Attuari », anno III, n. 2, 1932).

2. — Il Kamke parte dall'osservazione empirica che certi fenomeni, a farne ripetute prove, danno luogo a delle frequenze che si avvicinano ordinariamente a un valore determinato, ed ammette che tale valore sia *il limite* della sucessione delle frequenze. Egli definisce così la probabilità del fenomeno come il limite della frequenza al tendere del numero delle prove all'infinito.

Fondamentalmente, è lo stesso punto di partenza del Mises (1), sanato però dall'intima contradittorietà abbandonando il « Regellosikkeitsaxiom » (assioma della non-regolarità, della mancanza di una regola nel succedersi delle prove favorevoli e sfavorevoli). È interessante il fatto che anche un seguace dell'ordine di idee del Mises abbia avvertito la necessità di eliminare il « Regellosikkeitsaxiom », ma più interessante ancora è osservare come, scacciato dalla porta (dal sistema di « assiomi » di partenza), esso rientri dalla finestra (nell'impostazione di ogni problema pratico), e con esso l'assurdo, sanato nel campo teorico, si riaffacci non appena si tentano applicazioni concrete. Cosicchè il Kamke, nella sua trattazione, per riuscire a sanare le contradizioni del sistema di Mises, altro non fa che « la teoria della somma di Cesaro per successioni formate esclusivamente di zeri e di uni », adoperando arbitrariamente delle espressioni prese dal calcolo delle probabilità.

Finchè si rimane nel campo matematico, definendo ad esempio come probabilità che un intero sia divisibile per 7 il limite (uguale manifestamente a $1/7$) della frequenza dei multipli di 7 sui primi n interi, per $n \rightarrow \infty$, non c'è nessun dubbio che tutto va bene,

(1) R. von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, F. Deuticke ed., Vienna 1931; *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Springer ed., 1929.

e solo si potrebbe, eventualmente, discutere l'opportunità di tale denominazione. Se infatti si abbandona il significato usuale in cui, in un modo o nell'altro, s'intende la probabilità come una guida alla previsione, se ci si limita soltanto a teorizzare dei fatti compiuti, meglio sarebbe evitare addirittura la parola *probabilità* e usare quella di *frequenza* o *frequenza-limite* che è esente da ogni possibilità di dubbio od equivoco. E tale è manifestamente il caso nei problemi aritmetici, mentre nei problemi concreti lo sarebbe soltanto nell'ipotesi (praticamente impossibile) di avere già eseguito tutte le prove della successione infinita che si vuole considerare.

Ma se si tratta effettivamente di probabilità, il caso è molto diverso; prendiamo ad esempio il gioco della *roulette*, e vediamo cosa significhi, per chi segua tale definizione, dire che la probabilità è $p = 1/2$. Significa affermare che, in una serie prestabilita di prove, la frequenza tende al limite $1/2$, ciò che si giustifica con l'osservazione empirica che, facendo un numero molto grande di prove, ordinariamente la frequenza è prossima a $1/2$, e l'approssimazione è tanto maggiore quanto maggiore è il numero delle prove. In particolare, significa affermare l'*impossibilità* che venga sempre « nero », indefinitamente. E qui vien spontaneo d'osservare che se è innegabile, da un lato l'estrema inverosimiglianza che su un gran numero di prove, e peggio quindi su infinite prove, appaia sempre « nero », è altrettanto innegabile che non si vede però alcuna ragione di escludere come impossibile *a priori* tale eventualità, che non contiene certo nulla di per sè stesso contraddittorio. Altrettanto spontaneo sorge quindi il dubbio che l'assimilazione dell'« infinitamente poco verosimile » all'« impossibile » contenga quello stesso errore, infinitamente piccolo come entità ma essenziale rispetto alla sostanza e rispetto al metodo, di chi confondesse ad esempio « punto limite di un insieme » con « punto dell'insieme ». Costui potrebbe dire, in particolare, che tutti i numeri sono razionali (perchè approssimabili con qualunque grado di precisione da numeri razionali), e, ponendo $\sqrt{2} = m/n$, giungerebbe alla relazione assurda $2n^2 = m^2$.

Nel caso del Kamke, non si può dedurre in modo analogo un assurdo dai suoi postulati per sè stessi, perchè, come ho detto, l'assurdità formale intrinseca del sistema di Mises è stata sanata, ma essa ricompare nell'accingersi ad una qualsiasi applicazione concreta, basata sui criteri stessi per cui il Kamke ritiene di poter chiamare « Wahrscheinlichkeitsrechnung » la sua teoria. Le considerazioni empiriche infatti da cui si vorrebbe dedurre che in una successione di prove alla *roulette* la frequenza-limite sarà 1/2, dovrebbero valere evidentemente (non contenendo alcun elemento variabile da una successione di prove a una altra) o per tutte le successioni di prove o per nessnna. Se ad esempio io assisto saltuariamente al giuoco, e tengo conto solo delle prove fatte in mia presenza, non ho nessun motivo (nè cercandolo — come io farei — in ragioni psicologiche o logiche, nè volendosi rivolgere — come altri crederà opportuno — al « principio di ragione sufficiente ») per arrivare a una conclusione diversa a quella precedente: che la frequenza-limite nei casi da me osservati sarà 1/2, e, in particolare, che sarà impossibile che io veda *sempre* la pallina fermarsi sul « nero » (cosa importa infatti che durante la mia assenza la *roulette* funzioni o rimanga ferma?). E altrettanto posso dire in generale per una qualunque prefissata serie di prove, e se per ogni serie di prove è impossibile che venga sempre « nero », vuol dire che può presentarsi « nero » soltanto in un numero finito di prove, il che contraddice l'ipotesi che la frequenza-limite sia 1/2. Si potrebbe dire, sinteticamente, che aggiungere agli assiomi di Kamke, sotto qualuque forma, il principio di ragione sufficente, equivale ad aggiungere il « Regellosikkeitsaxiom », e conduce quindi a cadere nell'assurdo.

Un'altra forma di lumeggiare il punto debole del sistema è la seguente, meno adatta per farne la critica in sè, dato che (a differenza di quella precedente, in cui si usano le sue stesse armi) vi compaiono considerazioni estranee al sistema stesso, e che un difensore potrebbe rigettare per principio, ma forse più intuitiva per il lettore spregiudicato. Perchè riteniamo praticamente impossibile che in una successione infinita di prove alla *roulette* ci appaia sempre « nero »? Perchè ciò ci appare praticamente impossibile già su un gran numero n di prove, e ciò a sua volta perchè su n prove abbiamo una sola successione di tutti « nero » su un numero enorme (2^n) di successioni possibili giudicate ugualmente probabili. Altra ragione non c'è: nessuno, salvo forse qualche cabalista, penserà a una legge sovrumana che costringa i casi « eccezionali » a non verificarsi, più di quanto li costringa la loro stessa rarità. E anche tra le successioni infinite, la successione formata di tutti « nero » non ha qualche ragione speciale d'essere ritenuta impossibile; è semplicemente una fra infinite possibili, e perciò solo è giudicata infinitamente poco probabile. Ma allora anche un'altra qualunque *prestabilita* successione di « neri » e « rossi » potrebbe con altrettanta ragione ritenersi impossibile, perchè è altrettanto improbabile che indovini l'esito di tutti i colpi chi fa una previsione qualunque ben determinata, quanto chi prevede tutti « neri ». E quindi nessuna successione sarebbe possibile!

3. — Abbiamo così dimostrato che la teoria del Kamke, impeccabile finchè si rimane nel campo matematico (esempi in cui la frequenza-limite può essere *constatata*), non può essere applicata senza contradizione nel campo della probabilità (esempi in cui la frequenza limite costituisce una « profezia »). Ma c'è da chiedersi: ci sarebbe effettivamente un vantaggio per il calcolo delle probabilità se si riuscisse (a parte la questione se ciò sia *a priori* possibile o impossibile) a fondarlo secondo un punto di vista del tipo Mises-Kamke, basato cioè sulla frequenza-limite? Potrebbe venire il dubbio che quelli rilevati siano dei nei, nei che dànno fastidio al purista pedante, ma che il pratico non può fare a meno di sorvolare, in attesa che altri li sani, per poter godere dei risultati, importanti e persuasivi. Così come è comprensibile che molti non vogliano rinunciare all'integrità della suggestiva costruzione di Cantor nonostante le obiezioni sulla validità del principio di Zermelo. Se fossimo in un caso analogo, tutte le critiche fatte, pur conservando il medesimo valore teorico, avrebbero certamente un peso assai più debole. E' forse questo il caso?

Vedremo che no: vedremo precisamente che la considerazione, la determinazione, la conoscenza della frequenza-limite non sono nè necessarie nè sufficenti in nessun ragionamento di probabilità, e che l'unica sua funzione, nel modo di esposizione dei suoi fautori, è quella di spostare i ragionamenti dal calcolo delle probabilità a un campo formale, legato a quello da considerazioni non corrette, ma in modo che, tuttavia, ripetendo tali considerazioni non corrette sia nell'impostazione del problema che nell'interpretazione pratica dei risultati, conduce ai risultati corretti che si sarebbero potuti ottenere direttamente. Ci si riduce in sostanza a sostituire arbitrariamente il concetto di probabilità con quello di frequenza-limite, ad eseguire i calcoli sulla frequenza-limite, e ritornare poi a interpretare la frequenza limite come probabilità. Ma nè il primo nè il secondo passaggio sono corretti, e solo il fatto che i due passaggi sono l'inverso l'uno dell'altro, fa sì che si correggano a vicenda, e che, supposto sulla frequenza-limite si siano fatte operazioni che si potevano fare sulla probabilità, conducano a risultati esatti. Ora, le operazioni che occorrono per trattare direttamente le probabilità, sono somma e prodotto (teoremi delle probabilità totali e delle probabilità composte); poichè i teoremi corrispondenti valgono anche per la sommazione di Cesaro, è certo che si giunge formalmente ai medesimi risultati per tutti i problemi che si possono impostare senza contradizioni, ma altrettanto certo che nulla si può ottenere di più. Dal punto di vista delle possibilità matematiche di sviluppo della teoria, nulla giustifica quindi una preferenza per il sistema in discussione.

Almeno rende esso più chiaro il senso dei problemi? Forse a qualcuno può sembrare un gran pregio quello di tradurre il calcolo delle probabilità in una teoria matematica che non fa appello esplicito a concetti soggettivi. Ma è ovvio che i casi sono due: o mi limito a fare la teoria formale delle relazioni che saranno necessariamente verificate dalle frequenze limite, teoria priva di contraddizioni ma ancor più di importanza per le questioni pratiche, e allora, per un'impostazione puramente formale, posso trovare degli schemi molto più chiari ed opportuni, come quello di Cantelli di cui presto parleremo, o credo invece possibile prevedere la frequenza-limite, e allora non solo non esco dal campo soggettivo, ma cado in un campo che è insieme soggettivo e incomprensibile, perchè devo giudicare non più la verosimiglianza di un evento praticamente accertabile (come ad es. la frequenza su un numero finito di prove), ma di un evento immaginario praticamente incontrollabile e, peggio, assolutamente indeterminato. E poi, che cos'è che si determinerebbe, ammesso che qualcosa si possa determinare? La frequenza-limite in una successione, in un « Kollektiv », di cui praticamente ci interessano le prime mille, centomila prove, o sia pure un milione, un miliardo, un miliardo di miliardi, ma sempre un numero finito. Ora, un numero finito di eventi può essere comunque alterato in un « Kollektiv » senza che la frequenza-limite muti; vuol dire che, per formare un « Kollektiv », potremmo formalmente far seguire agli n eventi (prove) che effettivamente interessano tutti gli eventi, dall'$(n+1)$-esimo in poi, di un « Kollektiv » arbitrario, che abbia frequenza-limite uguale a un prefissato qualuque numero p; questo p non ha nulla a che vedere con la probabilità delle prove che effettivamente interessano. O si dirà che un « Kollektiv » non si può formare raggruppando eventi arbitrari, ma soltanto con eventi « della stessa natura »? Questa restrizione è tanto vaga che merita ben maggiore difiidenza del concetto intuitivo di probabilità. Ma sia pure. Si ammetterà che le osservazioni sulla mortalità riguardino eventi della stessa natura, e formiamo allora il « Kollektiv » in cui consideriamo, in ordine cronologico, tutti i nati in un paese, e osserviamo se sopravvivono o no all'età di un anno. Supponiamo che il quoziente di mortalità vada indefinitamente migliorando (tendendo a zero); la frequenza-limite sarà zero. Tuttavia, per un buon numero di anni, la mortalità può essere anche alta, e chiunque, ad es. in pratica una compagnia di assicurazioni, non potrà non tenerne conto, non potrà basarsi sulla frequenza-limite, anche ammettendo per impossibile di sapere con certezza che essa è nulla. Forse allora si vorrà ancora più restringere il « Kollektiv », e dire che i nati di ogni anno formano un « Kollektiv » diverso, e che, se hanno il torto di esser nati in numero finito, bisogna correggere questo inconveniente facendo appello a un'infinità di altri nati immaginari fra cui infiniti raggiungeranno e infiniti non raggiungeranno l'età di un anno, e pregarli di disporsi in un ordine tale che la frequenza-limite abbia quel significato che io non vedo cosa possa essere di diverso dalla probabilità in senso intuitivo, e che per certo tale ragionamento in base ai nati immaginari non definisce. O forse si dirà che in un « Kollektiv » la probabilità deve mantenersi costante in ogni singola prova? Credo che non ci sia altra via di scampo, e questo significherebbe la capitolazione del sistema. Perchè se parlo della probabilità (certo in senso intuitivo) delle singole prove, vuol dire che tutti i contorcimenti per definire la probabilità come frequenza-limite, liberandosi dal concetto intuitivo, sono falliti. Come volevasi dimostrare.

4. — Tutto quel che si può dire per avvicinare la teoria sviluppata dal Kamke al calcolo delle probabilità, è dunque soltanto questo: che, per una larga categoria di problemi del calcolo delle probabilità (ma non per tutti, come mostrano gli assurdi rilevati e altri facilmente rilevabili) si può, immaginando una successione infinita di esperienze analoghe, costruire un esempio di possibile andamento di risultati in modo da avere, per ogni successione di eventi analoghi, una frequenza-limite uguale alla probabilità.

Ma allora non rimane che uno schema formale, e, come schema formale, è certamente preferibile (come accennato) quello ben più semplice proposto dal Cantelli, che rappresenta gli eventi mediante figure piane, e le loro probabilità mediante le rispettive aree. Poichè l'essenziale è che sussista il problema delle probabilità totali, ogni immagine in cui intervenga una opportuna grandezza additiva (corpi e loro peso, solidi e loro volume, ecc. ecc.) può essere sfruttata come schema formale della teoria della probabilità; in particolare quello di Cantelli, che è indubbiamente fra i più intuitivi. Nei confronti di quello Mises-Kamke esso ha principalmente il vantaggio di non lasciare possibilità di illusioni sull'esistenza di un nesso che non sia quello puramente formale col concetto e la teoria delle probabilità, e di rappresentare direttamente la probabilità di un evento, evitando complicazioni quali la considerazione di un « Kollektiv ». Inoltre, tutte le proprietà che dipendono dal teorema delle probabilità totali assumono una chiarezza insuperabile. Meno felice è invece la rappresentazione per quanto riguarda le probabilità composte, poichè gli eventi « indipendenti » sono rappresentati da « aree moltiplicabili » (tali che l'area della parte comune è uguale al prodotto delle singole aree, rispetto, naturalmente, a una prestabilita unità di misura), e tale proprietà non è geometricamente molto significativa, pur non essendo nè oscura nè complicata.

Ad ogni modo, come immagine geometrica per illustrare mediante una figura schematica questo o quel problema procedimento o risultato, il metodo di Cantelli è certamente raccomandabile, specie a scopo didattico; volendo erigerlo a sistema, si incontrano però anche qui degli inconvenienti insormontabili. Anzitutto, una figura geometrica è costituita di punti, i quali non sono ulteriormente suddivisibili, il che lascerebbe pensare (come effettivamente in molti trattati si lascia pensare) all'esistenza di « casi elementari » non ulteriormente scomponibili; mentre in realtà ogni evento E si può sempre ulteriormente scomporre (ad es. in « E e A » ed « E e non A », se A è un evento che può verificarsi o non verificarsi insieme ad E). Inoltre, anche limitandosi ai « casi elementari » (non nel senso assoluto, privo di significato, ma in quello relativo, della più spinta suddivisione che ha interesse per un particolare problema), essi potrebbero essere in quantità maggiore che i punti del piano (trattandosi ad esempio di funzioni aleatorie, i casi possibili hanno una potenza maggiore di quella del continuo) e allora la rappresentazione non è possibile, mentre in altri casi semplici, pure essendo teoricamente possibile, la rappresentazione sarebbe talmente complicata da riuscire praticamente inutilizzabile (per es. quando i casi possibili siano i punti di uno spazio a tre o più dimensioni(1), che notoriamente è rappresentabile sul piano (Cantor), ma solo in modo discontinuo).

Infine, la nozione di area è intuitiva per molte figure, ad altre la si può estendere, con Lebesgue, mediante il concetto di « misura », per le rimanenti non le sappiamo dare un senso. Che ne sarà della probabilità nel secondo e terzo caso? Il Cantelli ammette che nel secondo la probabilità sia rappresentata dalla misura, e ammette pure in generale che sussista, per analogia con la teoria della misura, il teorema

(1) Basti dire che per dimostrare la possibilità che tre o più numeri aleatori siano indipendenti occorre sfruttare delle proprietà della curva di Peano (v. A. Denjoy, *Sur les variables pondérées multipliables de M. Cantelli*, « C. R. Ac. Sc. », vol. 196, pp. 1712-1714, 1933)! E ciò semplicemente perchè tale fatto evidente ha la sua rappresentazione naturale in uno spazio a più dimensioni, e la si vuole a forza trasformare in una rappresentazione piana.

delle probabilità totali nelle classi numerabili (un evento composto di un'infinità numerabile di eventi incompatibili ha probabilità uguale alla somma della serie delle probabilità); con ciò si viene a precludere la possibilità di attribuire delle probabilità qualsiasi agli eventi del terzo caso (per il teorema di Vitali e quello di Kuratowski-Banach) (1). Di più, la possibilità di estendere il teorema delle probabilità totali alle classi numerabili è in discussione (2), e, qualunque sia l'opinione che si preferisce, è ovvio che la questione non può essere semplicemente eliminata introducendo una rappresentazione geometrica e identificando la probabilità con la misura (3). Su questo punto è anzi notevole osservare che la teoria di Mises-Kamke conduce al risultato opposto e cioè, in accordo con la opinione mia personale, a negare la validità del teorema delle probabilità totali nelle classi numerabili (4). Basti un esempio semplicissimo: detto n un

---

(1) Cfr. LÉVY, *Sur quelques questions de calcul des probabilités* (IV. Le problème de la mesure), « Prac Matematyczno-Fizycznych », Warszawa, T. XXXIX, 1931.

(2) Cfr. ad es., le note di M. FRÉCHET e dell'A. in « Rend. R. Ist. Lombardo », vol. LXIII, 1930.

(3) Veramente, della proprietà in discussione, il Cantelli cerca di dare una dimostrazione, ma essa si basa su un' ipotesi sottaciuta che equivale al teorema stesso. Tale ipotesi è stata esplicitamente enunciata dal Kolmogoroff (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, « Ergebnisse der Mathematik », Vol. II, fasc. 3, 1933), e da lui chiamata « assioma della continuità » ; la sua equivalenza col teorema di additività completa risulta da anteriori ricerche di O. Nikodym. Secondo il mio punto di vista, la « continuità » così definita è una proprietà interessantissima di cui una legge di probabilità *può*, ma non necessariamente *deve*, godere.

(4) Cfr. KAMKE, *op. cit.* Osservo incidentalmente che, anche all' infuori dei seguaci del punto di vista Mises-Kamke, l'additività completa è (implicitamente o esplicitamente) negata dai numerosi Autori che considerano

intero qualsiasi, indichiamo con $f(n)$ la differenza fra n e il massimo quadrato non maggiore di n (quindi $f(n) = 0$ significa che n è un numero quadrato, $f(n) = 1$ che n è della forma $m^2 + 1$, ecc.). E' noto ed è facile vedere che la frequenza limite dei numeri quadrati è nulla, e che è nulla quindi anche la frequenza-limite dei numeri che hanno $f(n) = 1$, dei numeri che hanno $f(n) = 2$, e, in generale, dei numeri che hanno $f(n) = k$, con k intero determinato qualsiasi. I casi possibili sono $k = 0, 1, 2 \ldots$, ciascuno di essi ha frequenza-limite nulla, e tuttavia la somma di tutti i casi possibili ha naturalmente frequenza-limite uguale a 1. Mentre, ammettendo la proprietà additiva nelle classi numerabili, la frequenza-limite della somma di un'infinità numerabile di eventi a frequenza-limite nulla dovrebbe ugualmente risultare nulla $(0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0)$.

5. — Ma quale sarebbe lo scopo d'un'impostazione sistematica secondo una rappresentazione puramente formale? Lo dice chiaramente lo stesso Cantelli: quello soltanto di permettere a matematici puristi di applicarsi a problemi interessanti per il calcolo delle probabilità senza incontrare quelle diffidenze che la definizione di probabilità con le relative discussioni fa sorgere in essi (1). In altre parole, lo

---

successioni di casi «ugualmente probabili»; ciò appare esplicitamente e sistematicamente nella memoria di Lomnicki (*Nouveaux fondements de la théorie des probabilités*, «Fund. Math.», T. IV, 1923), mentre ad es. il Lévy, nell'appendice al suo trattato, dopo aver in un primo tempo abbozzato una teoria assiomatica del calcolo delle probabilità includendo l'additività completa, abbandona tale restrizione per poter trattare esempi con un' infinità numerabile di casi ugualmente probabili.

(1) Cito dal CANTELLI, (l. cit.): «Tengo a trattare questo argomento affinchè, con molta tranquillità, si possa considerare la teorica del Calcolo delle

scopo è quello di insegnare la teoria delle probabilità senza insegnarne il significato, di insegnare quali relazioni intercedano fra le probabilità senza dire cosa sono e come si valutano le probabilità; lo scopo è quindi quello stesso del metodo «assiomatico», e potrà quindi in modo migliore esser raggiunto mediante una definizione della probabilità basata su postulati formali. Non c'è infatti bisogno di eliminare anche la nozione di «evento», che ha un significato logico preciso (proposizione categorica); basta eliminare la nozione empirica di probabilità, per considerare una funzione qualunque che gode delle proprietà occorrenti.

Siano $E_1, E_2, \dots E_n$ degli eventi; potremmo studiare in generale le funzioni $f(E)$ che a ogni evento fanno corrispondere un numero reale, e in particolare quelle *additive*, tali cioè che

$$f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$$

quando E_1 e E_2 sono incompatibili. Lo studio delle funzioni additive di eventi, costituisce (1), formalmente, il calcolo delle probabilità, e ciò può essere compreso e applicato senza diffidenza da ogni purista; le questioni e discussioni empiriche sono relegate al momento di scegliere, fra tutte le funzioni additive quella che riteniamo rispondente al problema di

probabilità come una parte dell'analisi matematica pura non suscettibile di alcuna diffidenza». «E mi pare fuor di dubbio che sia proprio questo indirizzo il più adatto a soddisfare le esigenze intellettuali di quei matematici puristi che intendono rifuggire da ogni applicazione».

(1) Sotto la restrizione, inessenziale, che $f(E) = 1$ quando E è certo (scelta dell'unità di misura per le probabilità).

probabilità considerato. Formalmente, due eventi sono indipendenti rispetto alla funzione f se

$$f(E_1 E_2) = f(E_1) \cdot f(E_2),$$

e analogamente si possono introdurre tutti i concetti necessari per il calcolo delle probabilità e sviluppare tutta la teoria. La quale assume circa l'identico aspetto formale di quella di Cantelli, sostituendo come in quella alla probabilità una funzione additiva di cui non si specifica il significato (e che si potrebbe ad es. denominare «peso» o «valore» o «misura», ecc.) ma senza sostituire agli eventi degli enti di altra natura, il che non è necessario nè opportuno. Si eliminano così automaticamente tutte le obiezioni dovute ad imperfezioni nella rappresentazione del campo naturale del calcolo delle probabilità, costituito dagli eventi, mediante figure, successioni, classi di casi possibili o altri schemi artificiali, e si risponde pienamente allo scopo di istituire rigorosamente, indipendentemente da ogni discussione sulla probabilità, tutto ciò che nel calcolo delle probabilità costituisce la teoria matematica formale (1).

---

(1) Il merito di aver appoggiato la teoria delle probabilità al calcolo logico risale al BOOLE (cfr. ad es. P. MEDOLAGHI, *La logica matematica e il calcolo delle probabilità*, «Boll. Ass. It. Attuari», n. 18, 1907, e bibl. *ivi*), e quello di aver cercato per primo un sistema di postulati, per fondare il calcolo delle probabilità, al BOHLMANN (*Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, «Atti IV Congr. Mat.», vol. III, Roma 1908). Essi non intendevano però lo scopo delle loro ricerche nel senso sopra sviluppato, di scindere la caratterizzazione di tutte le funzioni di probabilità (funzioni additive) possibili dalla ricerca di quella che si vuole prescegliere, ma pensavamo sempre di enunciare delle proprietà delle probabilità (come nozione intuitiva o comunque considerata già come definita). Analoga è la posizione del Kolmogoroff nell'*op. cit.*, che

6. — Avendo seguito una via naturale, senza abbandonare il campo proprio del calcolo delle probabilità, costituito dagli eventi, abbiamo il vantaggio di poter passare in modo naturale al campo concreto, anzichè dover ricominciare da capo su tutt'altre basi e per tutt'altra via, come saremmo costretti a fare se la teoria formale istituita non fosse che una costruzione isolata e artificiosa, priva di relazioni effettive col campo della probabilità.

Mantenendosi nel campo appropriato, per passare allo studio effettivo della probabilità non occorre modificare nulla; basta soltanto dare alla funzione $f(E)$ il nome di «probabilità di E», naturalmente dopo aver introdotto — nel modo che si preferisce — la nozione di probabilità di un evento, e dopo aver dimostrato che la probabilità (o meglio la sua misura numerica) soddisfa le ipotesi formulate per f. Ora, si possono immaginare due diversi modi di concepire ed effettuare tale passaggio all'interpretazione probabilistica: il primo, che si potrebbe dire *rigido*, consiste nel definire (per una qualunque via, secondo una qualunqne concezione) la probabilità di un evento, e determinare con ciò univocamente una funzione $P(E)$, che sarà, in base a teoremi da stabilire successivamente, una particolare fra le funzioni f; il

---

costituisce indubbiamente la migliore esposizione riassuntiva della teoria delle probabilità secondo vedute moderne. Più vicini al mio punto di vista sono gli AA. che mostrano di concepire il calcolo delle probabilità come una speciale «logica multivalente»; tale indirizzo, la cui idea era già contenuta in lavori logici di Lukasiewicz (p. es. *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, «C. R. Soc. Sc. Varsovie», XXIII, 1930), ed è ormai notevolmente diffusa, ha trovato un principio di svolgimento concreto in una recente breve nota di Mazurkiewicz (*Zur Axiomatik der Wahrscheinichkeitsrechnung*, «C. R. Soc. Sc. Varsovie», XXV, 1933).

secondo, che si potrebbe all'opposto chiamare *elastico*, consiste nel dimostrare che tutte le funzioni f godono delle proprietà necessarie e sufficenti per rappresentare delle valutazioni di probabilità (anche qui, definite secondo una qualunque concezione, per qualunque via) non intrinsecamente contradittorie, lasciando poi a una seconda fase (extra-matematica) la discussione e l'analisi dei motivi e dei criteri per la scelta di una particolare fra tutte queste valutazioni possibili.

Benchè nulla *a priori* vieti di seguire l'una o l'altra di queste due vie qualunque sia la concezione della probabilità che si vuole abbracciare, pure è indubbio che esse si presentano sotto una luce diversa a seconda che la probabilità si consideri come una nozione oggettiva o soggettiva; per chi segue una concezione soggettiva, il secondo modo di procedere non solo è il più naturale, ma risponde, con la sua distinzione tra caratterizzazione delle valutazioni ammissibili e scelta di una particolare tra esse, a una precisa essenziale esigenza; per chi segue una concezione oggettiva, invece, il primo sarà il modo di procedere a prima vista più naturale, e soltanto le esigenze di una più approfondita analisi, mostreranno il vantaggio della scissione operata nel secondo. Per costui tale scissione avrà lo stesso significato metodologico della distinzione della geometria in proiettiva e metrica: sviluppare una teoria prescindendo in un primo tempo da una delle nozioni che vi intervengono, per ottenere così una costruzione più generale, mettendo in evidenza cosa effettivamente dipende dalla nozione trascurata, cosa ne è indipendente, e come e con quale grado di arbitrarietà la si possa successivamente introdurre.

Nel nostro caso, si tratta di separare quelle che del calcolo delle probabilità sono le leggi formali, astratte, da ciò che invece ha una relazione coi singoli casi concreti, e cioè la valutazione di una probabilità, caso per caso. Tale separazione è ben naturale, come è naturale separare, nella logica, lo studio delle leggi formali dall'analisi del significato che ha una singola proposizione e l'affermazione che essa è vera o falsa. La logica formale non ha per esempio il compito di dire se è vero o falso che Socrate è un uomo oppure un albero, e che gli uomini sono mortali o gli alberi sono serpenti, ma solo di condurci spassionatamente a concludere che se Socrate è un uomo e gli uomini sono mortali allora Socrate è mortale, mentre se Socrate è un albero e gli alberi sono serpenti, allora Socrate è un serpente. La logica non può e non deve giudicare o discutere sulla o minore attendibilità e verosimiglianza dell'una o dell'altra opinione: essa insegna a ogni individuo a trarre dalle sue proprie opinioni, delle quali lascia a lui stesso ogni qualsiasi responsabilità, quelle conseguenze che, per mantenersi coerente con sè stesso, deve riconoscere per vere. Guai se la logica, prima di stabilire delle leggi, volesse cacciarsi in un ginepraio di discussioni filosofiche per appurare se e quando abbia senso dire che un'opinione è giusta o sbagliata! Altrettanto vantaggioso riesce certamente anche nel calcolo delle probabilità sviluppare lo studio delle leggi formali indipendentemente dalle discussioni, difficili e complesse, sul significato delle probabilità.

7. — Ciò che a questo punto riuscirà più oscuro, sarà per qual via sia possibile stabilire le leggi formali del calcolo delle probabilità prima di dare un criterio per la valutazione delle probabilità; naturalmente, a nulla si può giungere senza ammettere nulla, ma vi sono delle proprietà che si possono enunciare e che sono ben comprensibili e anche giustificabili *a*

priori, che permettono di distinguere valutazioni di probabilità «formalmente ammissibili» e valutazioni di probabilità intrinsecamente contradittorie, e che permettono di identificare le prime con le funzioni additive precedentemente considerate.

Si può, naturalmente, procedere in più modi diversi; il più elementare e intuitivo consiste indubbiamente nel considerare il problema della coerenza nella determinazione delle «quote di scommessa». Supponiamo che un individuo valuti a 20, 30, 70 lire, in generale a p. 100 lire, il prezzo di una scommessa che dà un guadagno di 100 lire verificandosi una data circostanza o evento E: diremo che 0,20, 0,30, 0,70, e in generale p, è la quota di scommessa sull'evento E stabilita dal dato individuo. Sulla base di tale quota di scommessa supponiamo egli sia disposto a scommettere, tanto pro che contro, una somma qualunque (la limitazione praticamente necessaria di non andare al di là di una somma massima è indifferente per la trattazione, e tanto vale prescinderne): fissata la quota in 0,30, egli accetterà indifferentemente di promettere 10, 100, 1000 lire nel caso che si verifichi l'evento E a chi gliene versa 3, 30, 300, o inversamente a a pagare 3, 30, 300 lire a chi si obblighi a versargliene 10, 100, 1000, sempre nel caso considerato.

A proposito di queste quote di scommessa possiamo considerare due problemi: l'uno prettamente matematico, consistente nel ricercare se esse possono venir fissate ad arbitrio, o se esistono e quali sono le condizioni che debbono essere sodisfatte nel fissarle per evitare incongruenze; l'altro empirico-psicologico, consistente nell'esaminare i motivi cui nel fissarle ci ispiriamo. Si ha evidentemente un'incongruenza se le quote di scommessa sono stabilite in modo che un competitore, combinando insieme delle scommesse in modo opportuno, possa assicurarsi la vincita: se ad es. si hanno tre possibilità (diciamo: vittoria, pareggio, sconfitta, in una determinata gara di qualsiasi genere), e fisso le quote di scommessa in 0,40, 0,20, 0,30, un competitore può assicurarsi 100 lire in ciascuno dei tre casi, e cioè ricevere 100 lire senz'altro, pagandone $40 + 20 + 30 = 90$; se invece le fisso in 0,50, 0,20, 0,40, egli può ricevere $50 + 20 + 40 = 110$ lire verso l'impegno di pagarne 100 in ciascuno dei tre casi e cioè, in definitiva, ricevere 110 per pagare 100; soltanto se le tre quote danno per somma l'unità, una tale incongruenza scompare. Questo ragionamento è generale, e se ne può dedurre facilmente il teorema d'addizione delle quote di scommessa: si dimostra cioè che se un evento è la somma di due o più altri eventi incompatibili, la quota di scommessa di quello si deve fissare uguale alla somma delle quote di scommessa di questi.

Ma che cosa rappresentano queste quote di scommessa? Indubbiamente misurano in certo qual modo il grado di fiducia sentito dall'individuo che le stabilisce nell'avverarsi dei corrispondenti eventi: quanto maggiore è tale grado di fiducia, tanto maggiore sarà la quota di scommessa, che sarà, in particolare fissata prossima a zero per eventi ritenuti praticamente impossibili, prossima a 1 per eventi ritenuti praticamente certi. Per chi segue il punto di vista soggettivo, la probabilità (soggettiva) non è altro che tale grado di fiducia, e la teoria abbozzata per le quote di scommessa s'interpreta immediatamente come calcolo delle probabilità (1). Per chi s'ispira a un punto

---

(1) B. DE FINETTI, *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*, «Boll. U. M. I.», anno IX, n. 5, 1930; *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità*, «Rend. R. Acc. Lincei», vol. XII,

di vista oggettivo, apparirà a ogni modo plausibile, comunque egli voglia concepire o definire la probabilità, che un individuo possa a tale probabilità ispirarsi nel determinare le quote di scommessa senza cadere in incoerenza, possa cioè, senza cadere in incoerenza, attribuire ad un evento una quota di scommessa tanto più alta quanto maggiore ne è la probabilità: se così non fosse vorrebbe dire che è impossibile seguire come linea generale il criterio di attendere un evento con fiducia tanto maggiore quanto più esso è probabile, e una simile conclusione sarebbe certo inaccettabile per chiunque. Ma se tale conclusione si esclude, bisogna ammettere che le «quote di scommessa» si possono stabilire *in funzione* della probabilità e che esse danno anzi il modo più pratico e opportuno di misurare la probabilità (1). E allora segue che il teorema di addizione, dimostrato per le quote di scommessa, deve valere altresì per le probabilità, nel qual campo è noto sotto il nome di teorema delle probabilità totali.

Per tal modo, indipendentemente da ogni possibile definizione di probabilità, si possono stabilire i teoremi fondamentali della teoria delle probabilità, e caratterizzare la classe più generale delle «valutazioni di probabilità» formalmente ammissibili: tutte e sole quelle che godono della proprietà additiva.

8. — Come valutare le probabilità? E' l'unico punto aperto alla discussione, per chi accetti fin qui i ragionamenti che precedono. E il fatto che tale domanda

---

2° sem., fasc. 9, 1930; *Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico,* «Atti S. I. Progr. Sc.», vol. II, Congr. Bolzano-Trento, 1930.

(1) B. DE FINETTI, *Sul significato soggettivo della probabilità,* «Fundamenta Mathematicae», T. XVII, Warszawa, 1931.

lascia adito a tutte le risposte ispirate ai punti di vista più disparati, mostra che quanto precede può effettivamente essere accettato da chiunque senza che sia costretto ad abbandonare preventivamente le sue opinioni preferite.

I risultati raggiunti hanno però un effetto salutare: quello di *svalutare* e far passare in seconda linea quelle discussioni che, fin quando costituivano delle pregiudiziali per la trattazione stessa del calcolo delle probabilità, rappresentavano delle difficoltà assai serie, generavano discordie insanabili. Ora invece tutte le possibili e immaginabili definizioni della probabilità non sono che diversi criteri pratici per la valutazione effettiva delle probabilità, e si potrà anzi benissimo adottare un punto di vista eclettico ispirandosi per ogni caso particolare alla concezione che meglio vi si addice. Così per i problemi di estrazioni e di giuochi basarsi sulla considerazione di casi ugualmente probabili, in problemi statistici sull'osservazione e la previsione di frequenze, e così via.

Se poi, a questo punto, si farà la semplice osservazione che tutto il complesso di regole di ragionamento sul « probabile » che costituisce la teoria delle probabilità si applica con lo stesso diritto e lo stesso rigore tanto nel caso che le probabilità siano definite secondo uno qualunque dei criteri « obbiettivi » quanto ove esse non abbiano che il valore soggettivo di una « quota di scommessa », se si concluderà che è una restrizione innaturale e arbitraria quella di chiamare « calcolo delle probabilità » il ragionamento probabilistico nei casi in cui è applicabile quel certo preferito criterio di valutazione e di escluderne lo stesso tipo di ragionamento quando lo si applichi in tutti i casi della vita che si rifiutano di passare sotto le forche caudine di un criterio di valutazione troppo stretto, se quindi si abbandoneranno i pregiudizi aprioristici contro il concetto soggettivo di probabilità, si sarà già sostanzialmente d'accordo con tutte le mie idee (1). Non rimarrebbe infatti che la discussione se la probabilità può avere talvolta anche un significato oggettivo, o se esso è sempre e soltanto soggettivo (come io sostengo) anche se in certi casi vi sono delle ragioni così spontanee da far concordare nella valutazione tutte le persone « di buon senso ». Ma questa non sarebbe più che una questione filosofica, priva o quasi di interesse per le applicazioni concrete.

L'importante è di liberarsi da quelle visioni particolari e unilaterali che costringono ad avvizzire la teoria delle probabilità in un campo ritretto privo di respiro e di vita, come se essa non potesse darci il suo ausilio in tutti i casi in cui ci dobbiamo basare su previsioni e congetture, come se fosse una creazione artificiosa estranea alle nostre facoltà istintive, come se non avesse la tempra necessaria per lanciarsi nel mare aperto della realtà.

Trieste, 5 luglio 1933-XI.

---

(1) B. DE FINETTI, *Probabilismo,* « Bibl. di Filosofia diretta da A. Aliotta » Perrella ed., Napoli, 1931.