SUL COMPORTAMENTO DI $e^{\lambda\alpha}$, E SUL CONCETTO DI OMOGRAFIA STABILE.

In: « *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei.* Roma, 1929, pp. 364-373.

Sul comportamento di $e^{\lambda\alpha}$, e sul concetto di omografia stabile

Nota di BRUNO de FINETTI, presentata dal S. O. GIOVANNI GIORGI (1)

Sommario. — Si studia il vettore $e^{\lambda\alpha}\,\boldsymbol{v}$ al variare del parametro λ, considerandone i componenti secondo un opportuno sistema di riferimento (costituito dai componenti di $\boldsymbol{v}$ secondo gli spazi invarianti isolati di α, e altri vettori da essi dedotti), e si dimostra che condizione necessaria e sufficiente perchè, qualunque sia $\boldsymbol{v}$, il vettore $e^{\lambda\alpha}\,\boldsymbol{v}$ tenda a zero quando $\lambda \to \infty$, è che le radici di $I_n(\alpha - x) = 0$ abbiano tutte la parte reale negativa (2). L'omografia α si dirà in tal caso *stabile*.

1. — Se α è un'omografia vettoriale (in uno spazio a n dimensioni) e $a \pm ib$ è una coppia di radici, multiple d'ordine c, dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$, i vettori $\boldsymbol{x}$ tali che $[(\alpha - a)^2 + b^2]^n \boldsymbol{x} = 0$ costituiscono un sistema lineare a $2c$ dimensioni (*spazio di radici* (secondo Pincherle e Amaldi) o *delle direzioni nulle* (secondo Burgatti) dell'omografia $[(\alpha - a)^2 + b^2]^n$); se $b = 0$ (caso di una radice reale multipla d'ordine c) l'analoga equazione (o la $(\alpha - a)^n \boldsymbol{x} = 0$, identicamente equivalente) definisce un sistema lineare a c dimensioni. Questi sistemi lineari di vettori sono spazi invarianti per l'omografia α; sono anzi gli spazi invarianti isolati di α, che sono tanti quanti le radici (o coppie di radici) distinte di $I_n(\alpha - x) = 0$, e ogni vettore si può esprimere in uno e un sol modo come somma di vettori appartenenti ciascuno a uno degli spazi invarianti isolati di α (3).

(1) Presentata nella Sessione VII, (7 luglio 1929).

(2) L'A. con un simbolo del tipo $I_n(\alpha - x)$ intende il determinante della matrice che corrisponde all'operatore $(\alpha - x)$. Quindi la sua equazione significa $|\alpha - x| = 0$, cioè la cosiddetta equazione fondamentale. [Nota del presentatore].

(3) Per la dimostrazione di queste ed altre analoghe proprietà che ci serviranno, rimando ai miei recenti lavori tuttora inediti: « *Caratteristica di un'omografia vettoriale* » e « *Studio delle omografie vettoriali in relazione alle radici di* $I_n(\alpha - x) = 0$ ».

Sfrutteremo queste proprietà per studiare in modo semplice il comportamento del vettore $e^{\lambda\alpha}\,\boldsymbol{v}$ in funzione del parametro λ [1]: basterà infatti limitarsi al caso in cui $\boldsymbol{v}$ appartenga a uno spazio invariante isolato di α.

2. — Supponiamo dapprima che $\boldsymbol{v}$ appartenga a uno spazio invariante relativo a una radice reale a: sia cioè $(\alpha - a)^n\,\boldsymbol{v} = 0$; poniamo

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{v}\,, \quad \boldsymbol{p}_2 = (\alpha - a)\,\boldsymbol{p}_1\,, \quad \boldsymbol{p}_3 = (\alpha - a)\,\boldsymbol{p}_2\,, \ldots$$

e ricordiamo che si ottiene così un certo numero h di vettori linearmente indipendenti, mentre $\boldsymbol{p}_{h+1}$ e i successivi risultano nulli (infatti è certo $\boldsymbol{p}_{n+1} = (\alpha - a)^n\,\boldsymbol{v} = 0$).

Studiamo

$$e^{\lambda\alpha}\,\boldsymbol{p}_1 = e^{\lambda a}\,e^{\lambda(\alpha-a)}\,\boldsymbol{p}_1$$

che evidentemente dovrà dipendere linearmente da $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_h$ (ciò che del resto risulterà anche dal seguito), e poniamo quindi

$$e^{\lambda(\alpha-a)}\,\boldsymbol{p}_1 = \Sigma_k\, v_k(\lambda)\,\boldsymbol{p}_k\,.$$

Derivando si ha

$$\frac{d}{d\lambda}\,e^{\lambda(\alpha-a)}\,\boldsymbol{p}_1 = (\alpha - a)\,e^{\lambda(\alpha-a)}\,\boldsymbol{p}_1 = (\alpha - a)\,\Sigma_k\, v_k(\lambda)\,\boldsymbol{p}_k =$$
$$= \Sigma_k\, v_k(\lambda)\,\boldsymbol{p}_{k+1} = \Sigma_k\, v_{k-1}(\lambda)\,\boldsymbol{p}_k$$

(ove si ponga $v_0(\lambda) = 0$), e d'altronde

$$\frac{d}{d\lambda}\,e^{\lambda(\alpha-a)}\,\boldsymbol{p}_1 = \Sigma_k\,\frac{dv_k(\lambda)}{d\lambda}\,\boldsymbol{p}_k\,.$$

Uguagliando le singole componenti:

$$\frac{dv_k(\lambda)}{d\lambda} = v_{k-1}(\lambda)$$

[1] Sull'argomento si vedano gli studi del GIORGI: « *Sulle funzioni delle matrici* », « *Fattori e Indici nei gruppi lineari e nei gruppi normali di operazioni* », Rendiconti Lincei, Anno 1928, I semestre.

e tenendo conto delle condizioni iniziali $v_1(0) = 1$, $v_k(0) = 0$ $(k > 1)$, risulta senz'altro

$$v_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!},$$

$$e^{\lambda\alpha}\, p_1 = e^{\lambda a}\, \Sigma_k \frac{\lambda^k}{k!}\, p_k .$$

3. — Questo risultato è assai semplice e d'altronde non nuovo, ma più interessante si presenta il caso delle radici complesse.

Supponiamo ora che v appartenga a uno spazio invariante relativo a una coppia di radici complesse $a \pm ib$: sia cioè $[(\alpha - a)^2 + b^2]^n\, v = 0$, ossia, posto $\alpha = a + b\,\beta$, risulti $(\beta^2 + 1)^n\, v = 0$. Poniamo

$$\begin{array}{lll} q_1 = v \quad , & q_3 = (\beta^2 + 1)\, q_1 , & q_5 = (\beta^2 + 1)\, q_3 , \ldots \\ q_2 = \beta\, q_1 , & q_4 = \beta\, q_3 \quad , & q_6 = \beta\, q_5 \quad , \ldots \end{array}$$

e ricordiamo che si ottiene così un certo numero $2h$ di vettori linearmente indipendenti, mentre q_{2h+1} e i successivi sono tutti nulli (infatti è certo $p_{2n+1} = (\beta^2 + 1)^n\, v = 0$). Si ha

$$\beta\, q_i = q_{i+1} \quad (i \text{ dispari}) \qquad \text{o} \qquad \beta\, q_i = q_{i+1} - q_{i-1} \quad (i \text{ pari}).$$

Studiamo

$$e^{\lambda\alpha}\, q_1 = e^{\lambda a}\, e^{\lambda b \beta}\, q_1 ,$$

o, ciò che fa lo stesso, $e^{\lambda\beta}\, q_1$, che, come è intuitivo e come apparirà dal risultato, dipende linearmente da $q_1, q_2, \ldots, q_{2h}$.

Si tratterà di determinare le funzioni $w_k(\lambda)$ tali che

$$e^{\lambda\beta}\, q_1 = \Sigma_k\, w_k(\lambda)\, q_k ,$$

dopo di che si avrà

$$e^{\lambda\alpha}\, q_1 = e^{\lambda a}\, \Sigma_k\, w_k(b\lambda)\, q_k .$$

Derivando

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\beta} q_1 = \beta e^{\lambda\beta} q_1 = \beta \Sigma_k w_k(\lambda) q_k =$$

$$= \Sigma_k w_k(\lambda) q_{k+1} - \sum_{k \text{ pari}} w_k(\lambda) q_{k-1} = \Sigma_k w_{k-1}(\lambda) q_k - \sum_{k \text{ dispari}} w_{k+1}(\lambda) q_k$$

(ove si ponga $w_0(\lambda) = 0$); d'altra parte

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\beta} q_1 = \Sigma_k \frac{dw_k(\lambda)}{d\lambda} q_k$$

e quindi

$$\frac{d}{d\lambda} w_k(\lambda) = w_{k-1}(\lambda) \qquad (k \text{ pari}) \quad , \text{ ossia } \frac{d}{d\lambda} w_{2m}(\lambda) = w_{2m-1}(\lambda)$$

$$\frac{d}{d\lambda} w_k(\lambda) = w_{k-1}(\lambda) - w_{k+1}(\lambda) \; (k \text{ dispari}), \text{ ossia } \frac{d}{d\lambda} w_{2m+1}(\lambda) = w_{2m}(\lambda) - w_{2m+2}(\lambda) \, .$$

Si tratta di integrare questo sistema d'equazioni differenziali ricorrenti colle condizioni iniziali $w_1(0) = 1$, $w_k(0) = 0$ $(k > 1)$.

Derivando si ottiene:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} w_k(\lambda) = w_{k-2}(\lambda) - w_k(\lambda)$$

(per $k > 1$) qualunque, ossia $w_k + w''_k = w_{k-2}$. Come condizioni iniziali abbiamo che, per $\lambda = 0$:

$$\begin{array}{lll} w_1 = 1 \, , & w'_1 = 0 \, , & \\ w_2 = 0 \, , & w'_2 = 1 \, , & \\ w_k = 0 \, , & w'_k = 0 & (k > 2) \, . \end{array}$$

L'integrale dell'equazione $y + y'' = \varphi$ colle condizioni iniziali $y = y' = 0$ per $x = 0$, è

$$y(x) = \operatorname{sen} x . \int_0^x \varphi(x) . \cos x . dx - \cos x . \int_0^x \varphi(x) . \operatorname{sen} x . dx = W\varphi(x)$$

(W è simbolo d'operazione distributiva) come si ottiene applicando il metodo della variazione delle costanti. Si ha quindi

$$w_k(\lambda) = \operatorname{sen}\lambda \int_0^\lambda w_{k-2}(\lambda) . \cos\lambda \, d\lambda - \cos\lambda \int_0^\lambda w_{k-2}(\lambda) \operatorname{sen}\lambda \, d\lambda = W w_{k-2}(\lambda) \quad (k > 2),$$

e poichè si trova subito $w_2(\lambda) = \operatorname{sen}\lambda$, questa formula ci permette di determinare tutte le w_k con k pari indipendentemente da quelle con k dispari, che se ne ricavano poi subito derivando.

È infatti

$$w_{2m}(\lambda) = \mathrm{W}^{m-1} \operatorname{sen}\lambda \;, \qquad w_{2m-1}(\lambda) = \mathrm{D}\mathrm{W}^{m-1} \operatorname{sen}\lambda \;.$$

4. — Ma è più opportuno seguire un procedimento diverso, che conduce direttamente all'espressione esplicita di $w_k(\lambda)$.

Scriviamo la $w_k + w''_k = w_{k-2}$ mediante l'operazione D:

$$(1 + \mathrm{D}^2)\, w_k = w_{k-2} \;;$$

si deduce subito

$$(1 + \mathrm{D}^2)^m\, w_{2m} = 0 \;,$$

equazione lineare omogenea il cui integrale generale è

$$w_{2m}(\lambda) = \mathrm{P}_{m-1}(\lambda) \operatorname{sen}\lambda + \mathrm{Q}_{m-1}(\lambda) \cos\lambda$$

con P_{m-1}, Q_{m-1} polinomi di grado $m-1$, che, pel caso nostro, andranno determinati in base alle condizioni iniziali. Intanto P è funzione pari e Q funzione dispari, perchè $w_{2m}(\lambda)$ è funzione dispari: $w_{2m}(-\lambda) = -w_{2m}(\lambda)$. Ciò è vero per $m = 1$: $w_2(\lambda) = \operatorname{sen}\lambda$, $\operatorname{sen}(-\lambda) = -\operatorname{sen}\lambda$; dimostriamolo per induzione. Scomponiamo $w_{2m} = d_{2m} + p_{2m}$, con d funzione dispari e p funzione pari (ciò che è possibile, com'è noto, in uno e un sol modo). Abbiamo

$$w_{2m} + w''_{2m} = d_{2m} + d''_{2m} + p_{2m} + p''_{2m} = w_{2m-2} \;;$$

supponendo w_{2m-2} dispari, e separando la parte pari e dispari

$$d_{2m} + d''_{2m} = w_{2m-2} \;, \qquad p_{2m} + p''_{2m} = 0 \;.$$

Integrando

$$p_{2m}(\lambda) = a \operatorname{sen}\lambda + b \cos\lambda \;;$$

ma $a = 0$ essendo p_{2m} pari per definizione; $b = 0$ perchè

$$w_{2m}(0) = p_{2m}(0) = b \,.\, \cos 0 = b = 0 \;, \quad \text{e} \quad w_{2m} = d_{2m} \;, \qquad c.\ d.\ d.$$

Possiamo scrivere quindi w_{2m} sotto la forma, che risulterà assai opportuna:

$$w_{2m}(\lambda) = \sum_{0}^{m-1}{}_h\, a_h^{(m)}\, \lambda^h \operatorname{sen}\left(\lambda - h\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Derivando

$$w'_{2m}(\lambda) = \sum_{0}^{m-1}{}_h\, [a_h^{(m)} - (h+1)\, a_{h+1}^{(m)}]\, \lambda^h \operatorname{sen}\left(\lambda - (h-1)\,\frac{\pi}{2}\right)$$

(se si intende $a_h^{(m)} = 0$ per $h \geq m$)

$$w''_{2m}(\lambda) = -\sum_{0}^{m-1}{}_h\, [a_h^{(m)} - 2(h+1)\, a_{h+1}^{(m)} + (h+1)(h+2)\, a_{h+2}^{(m)}]\, \lambda^h \operatorname{sen}\left(\lambda - h\,\frac{\pi}{2}\right)$$

e uguagliando $w_{2m} + w''_{2m} = w_{2m-2}$ si ricava

$$a_{h-1}^{(m-1)} = 2h a_h^{(m)} - h(h+1)\, a_{h+1}^{(m)}.$$

Dobbiamo ora ricavare da tale relazione le costanti $a_h^{(m)}$, tenendo conto che $a_h^{(m)} = 0$ se $h \geq m$, che $a_0^{(1)} = 1$, e che la condizione $w'_{2m}(0) = 0$ per $m > 1$ implica

$$a_0^{(m)} - (0+1)\, a_{0+1}^{(m)} = 0\,, \qquad \text{ossia } a_0^{(m)} = a_1^{(m)}.$$

Cominciamo col determinare $a_h^{(m)}$ per $h = m-1$, poi per $h = m-2$, e così via. Per $h = m-1$ si ha semplicemente

$$a_{m-2}^{(m-1)} = 2(m-1)\, a_{m-1}^{(m)}$$

da cui

$$a_{m-1}^{(m)} = \frac{1}{2^{m-1}\,(m-1)!}.$$

È opportuno ora porre $c_h^{(m)} = 2^{m-1}(m-1)!\, a_h^{(m)}$, cosicchè $c_{m-1}^{(m)} = 1$, perchè le $c_h^{(m)}$ risultano interi positivi, e perchè si semplifica il calcolo. La relazione fra le a, scritta nelle c, diviene

$$c_h^{(m)} = \frac{m-1}{h}\, c_{h-1}^{(m-1)} + \frac{h+1}{2}\, c_{h+1}^{(m)}.$$

Sia $h = m - 2$: si ha:

$$c_{m-2}^{(m)} = \frac{m-1}{m-2} c_{m-3}^{(m-1)} + \frac{m-1}{2}, \qquad c_0^{(2)} = 1$$

da cui

$$c_1^{(3)} = 3, \qquad c_2^{(4)} = 6, \qquad c_3^{(5)} = 10, \ldots$$

e in generale

$$c_{m-2}^{(m)} = \frac{m(m-1)}{2},$$

come si dimostra subito per induzione. Sia $h = m - 3$: si ha

$$c_{m-3}^{(m)} = \frac{m-1}{m-3} c_{m-4}^{(m-1)} + \frac{m+2}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2}, \qquad c_0^{(3)} = c_1^{(3)} = 3$$

e quindi

$$c_{m-3}^{(m)} = \frac{(m+1)\,m\,(m-1)(m-2)}{2 \cdot 4}.$$

Proseguendo, si ha analogamente

$$c_{m-4}^{(m)} = \frac{(m+2)(m+1)\,m\,(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$c_{m-5}^{(m)} = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)\,m\,(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

e in generale

$$c_{m-k}^{(m)} = \frac{(m+k-2)(m+k-3)\ldots(m-k+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-2)}$$

che si può scrivere

$$c_{m-k}^{(m)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-3) \binom{m+k-2}{m-k} = \frac{[2(k-1)]!}{2^{k-1}(k-1)!} \binom{m+k-2}{m-k}$$

ossia

$$c_h^{(m)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-2h-3) \binom{2m-h-2}{h} = \frac{[2(m-h-1)]!}{2^{m-h-1}(m-h-1)!} \binom{2m-h-2}{h}.$$

Per $h=0$, $h=1$, si ha

$$c_0^{(m)}=c_1^{(m)}=1\,.\,3\,.\,5\,.\dots.(2m-3)=\frac{[2(m-1)]!}{2^{m-1}(m-1)!}\;;$$

verifichiamo poi in generale che è effettivamente soddisfatta la

$$c_h^{(m)}=\frac{m-1}{h}\,c_{h-1}^{(m-1)}+\frac{h+1}{2}\,c_{h+1}^{(m)}\;,$$

e per ciò basta osservare che, separando nel secondo membro il fattore comune

$$\frac{(m+k-3)(m+k-4)\dots(m-k+1)}{2\,.\,4\,.\,\dots\,.(2k-2)}$$

(ove $k=m-h$), rimane

$$(m-1)+\frac{2k-2}{2}=m+k-2\;,$$

che, moltiplicato per il fattore comune, dà appunto $c_h^{(m)}$.

Abbiamo quindi

$$w_{2m}(\lambda)=\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\sum_0^{m-1}{}_h\,\frac{[2(m-h-1)]!}{2^{m-h-1}(m-h-1)!}\binom{2m-h-2}{h}\lambda^h\operatorname{sen}\left(\lambda-h\frac{\pi}{2}\right).$$

Per determinare $w_{2m-1}(\lambda)=w'_{2m}(\lambda)$ non avremo che a calcolare (se $m>1$)

$$a_h^{(m)}-(h+1)\,a_{h+1}^{(m)}=\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\,[c_h^{(m)}-(h+1)\,c_{h+1}^{(m)}]=$$

$$=\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\cdot\frac{[2(m-h-1)]!}{2^{m-h-1}(m-h-1)!}\binom{2m-h-3}{h-1}=\frac{c_{h-1}^{(m-1)}}{2^{m-1}(m-1)!}$$

da cui

$$w_{2m-1}(\lambda)=\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\sum_0^{m-1}{}_h\,c_{h-1}^{(m-1)}\lambda^h\operatorname{sen}\left(\lambda-(h-1)\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\lambda}{2(m-1)}\,w_{2m-2}(\lambda)\;.$$

Ad esempio (scrivendo per brevità c, s, per $\cos\lambda$, $\operatorname{sen}\lambda$):

$$w_1(\lambda) = c$$

$$w_2(\lambda) = s$$

$$w_3(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda s$$

$$w_4(\lambda) = \frac{1}{2}(s - \lambda c)$$

$$w_5(\lambda) = \frac{1}{8}(\lambda s - \lambda^2 c)$$

$$w_6(\lambda) = \frac{1}{8}(3\,s - 3\,\lambda c - \lambda^2 s)$$

$$w_7(\lambda) = \frac{1}{48}(3\,\lambda s - 3\,\lambda^2 c - \lambda^3 s)$$

$$w_8(\lambda) = \frac{1}{48}(15\,s - 15\,\lambda c - 6\,\lambda^2 s + \lambda^3 c)$$

$$w_9(\lambda) = \frac{1}{384}(15\,\lambda s - 15\,\lambda^2 c - 6\,\lambda^3 s + \lambda^4 c)$$

$$w_{10}(\lambda) = \frac{1}{384}(105\,s - 105\,\lambda c - 45\,\lambda^2 s + 10\,\lambda^3 c + \lambda^4 s)$$

$$w_{11}(\lambda) = \frac{1}{3840}(105\,\lambda s - 105\,\lambda^2 c - 45\,\lambda^3 s + 10\,\lambda^4 c + \lambda^5 s)$$

$$w_{12}(\lambda) = \frac{1}{3840}(945\,s - 945\,\lambda c - 420\,\lambda^2 s + 105\,\lambda^3 c + 15\,\lambda^4 s - \lambda^5 c)\ .$$

5. Una conclusione importante che vogliamo trarre da questi calcoli è la seguente: *condizione necessaria e sufficiente perchè* $\lim_{\lambda=\infty} e^{\lambda\alpha}\mathbf{v} = 0$ *è che il vettore* $\mathbf{v}$ *dipenda da quei soli spazi invarianti isolati di* α *che corrispondono a radici colla parte reale negativa.*

Infatti

$$\lim_{\lambda=\infty} e^{\lambda a}\frac{\lambda^k}{k!} = 0 \qquad \text{se e soltanto se } a < 0\ ,$$

$$\lim_{\lambda=\infty} e^{\lambda a}\, w_k(b\lambda) = 0 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad a < 0\ ,$$

e quindi in uno spazio invariante isolato di α, sia che corrisponda a una radice reale a o a una coppia di radici complesse coniugate $a \pm ib$, è $\lim\limits_{\lambda=\infty} e^{\lambda\alpha} = 0$ se e solo se $a < 0$.

Diremo *stabile* un'omografia α se è $\lim\limits_{\lambda=\infty} e^{\lambda\alpha} = 0$, cioè se, qualunque sia la posizione iniziale P_0 di un punto mobile P, che si muove con velocità $\dot{P} = \alpha(P - 0)$, esso tende sempre asintoticamente al punto fisso 0. In altre parole: se 0 è un punto di *equilibrio stabile* per il campo di velocità $\alpha(P - 0)$.

Per quanto detto, *condizione necessaria e sufficiente perchè l'omografia α sia stabile è che le radici dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$ abbiano tutte la parte reale negativa.*

Roma, 13 giugno 1929-A. VII.