SULLE FUNZIONI AD INCREMENTO ALEATORIO.

In: « *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei* », 1929, vol. X, fasc. 3-4, pp. 163-168.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. X, serie 6ª, 2° sem., fasc. 3-4 – Roma, agosto 1929-VII.

Calcolo delle probabilità. — *Sulle funzioni a incremento aleatorio.* Nota [1] di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Sia X una grandezza variabile in funzione di un parametro λ, che potrà essere il tempo, come nel seguito intenderemo per fissare le idee.

Supponiamo che X sia soggetta nel tempo a variazioni accidentali, che, in altre parole, la legge secondo cui varia non sia una legge rigorosamente esatta, di modo che essa, noto il valore di X nell'istante iniziale $\lambda = 0$, non permetta di determinare il valore di X in un generico istante λ successivo $(\lambda > 0)$, ma soltanto la probabilità che esso cada fra certi determinati limiti.

Diremo allora che X è una funzione di λ a incremento aleatorio.

Se si ha un orologio *esatto*, che nell'istante $\lambda = 0$ segna il tempo $t = 0$, nell'istante generico λ segnerà il tempo $t(\lambda) = \lambda$; in pratica però

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1929.

l'*esattezza* ha sempre un senso alquanto approssimativo, e l'errore $X(\lambda) = t(\lambda) - \lambda$ sarà una funzione in generale non nulla di λ. Se ogni giorno l'orologio avanzasse (o ritardasse) di una stessa frazione ε, sarebbe naturalmente $X = \varepsilon\lambda$, ma non è questo il caso che ci può interessare, perchè non vi sarebbe nulla di aleatorio. Tenendo conto però che nessun orologio potrà marciare con ritmo perfettamente costante, tanto da eliminare ogni possibilità di scarti accidentali comunque piccoli, una simile relazione lineare non potrà rigorosamente sussistere: la conclusione che fin d'ora si presenta come presumibile è che l'errore $X(\lambda)$ sarà la somma di un termine lineare $\varepsilon\lambda$ (valore probabile) e di uno scarto accidentale, il cui ordine di grandezza crescerà al crescere di λ. È questo un esempio, l'esempio più elementare possibile, come vedremo, di problema del tipo generale che abbiamo considerato.

Possiamo distinguere infatti tre casi fondamentalmente diversi di leggi di probabilità per le funzioni a incremento aleatorio; la distinzione è altrettanto essenziale e profonda dal punto di vista filosofico e concettuale che dal punto di vista matematico e algoritmico. Supponiamo di conoscere i valori effettivamente assunti dalla variabile $X(\lambda)$ fino a un certo istante λ_0 (e cioè per $\lambda \leqq \lambda_0$); detto allora λ un istante successivo ($\lambda > \lambda_0$), la differenza $X(\lambda) - X(\lambda_0)$ rappresenta l'incremento Δ che la X dovrà subire nell'intervallo di tempo da λ_0 a λ, incremento che è incognito, ma del quale ammettiamo di sapere con quale probabilità possa cadere fra certi determinati limiti, ossia, più brevemente, del quale ammettiamo di conoscere la legge di probabilità $\Phi(\xi)$ (1). Diremo allora che *la* $X(\lambda)$ *è una funzione di* λ *con*

1) *incremento aleatorio a legge nota,*
2) *incremento aleatorio a legge differenziale,*
3) *incremento aleatorio a legge integrale,*

a seconda che la legge di probabilità dell'incremento Δ *che essa subirà da* λ_0 *a* λ

1) *è indipendente dal comportamento (noto o supposto noto) di* X *nell'intervallo precedente* λ_0,
2) *ne dipende solo in quanto dipende dal valore di* $X(\lambda_0)$,
3) *dipende non solo dal valore di* X *nell'istante* λ_0, *ma anche dal comportamento precedente.*

Nell'esempio già accennato, la probabilità di un certo scarto accidentale sarà a ritenersi indipendente dagli scarti accidentali eventualmente osservati in precedenza, e si ha quindi una funzione con *incremento aleatorio a legge nota*. Anzi, per di più, a legge *fissa* (o *costante*), in quanto la pro-

(1) $\Phi(\xi)$ rappresenta la probabilità che sia $\Delta < \xi$ (più metà della probabilità che sia esattamente $\Delta = \xi$, nel caso che tale probabilità sia finita). $\Phi(\xi)$ è funzione reale non decrescente, tende a 0 e 1 rispettivamente per $\xi \to +\infty$ e $\xi \to -\infty$, è discontinua nei punti cui si riferisce la precedente osservazione, e che costituiscono, al più, un aggregato numerabile. Per la Φ, detta anche *funzione di ripartizione*, e per la *funzione caratteristica*, di cui pure faremo uso, si vedano i Trattati del CASTELNUOVO e del LÉVY.

babilità di un medesimo scarto accidentale sarà a ritenersi uguale in intervalli di tempo uguali (la legge di probabilità dell'incremento Δ fra λ_0 e λ non solo dipende unicamente da λ_0 e λ, ma dipende soltanto dalla differenza $\lambda - \lambda_0$). Consideriamo invece un sistema materiale a un sol grado di libertà, che, avuto un certo impulso iniziale, persegue nel moto per forza d'inerzia dissipando ed esaurendo gradualmente la forza viva per gli attriti. Se con $X(\lambda)$ denotiamo la forza viva all'istante λ, è naturale che, quando si tenga conto delle variazioni accidentali, la X si dovrà considerare soggetta a *incremento aleatorio a legge differenziale*, perchè la legge probabile di decrescenza di X da un certo istante λ_0 in poi dipende ovviamente e soltanto dal valore $X(\lambda_0)$ della forza viva nell'istante λ_0 (1).

Se poi si tratta di dissipazione d'energia elastica, dovendosi tener conto anche dei fenomeni ereditari, la $X(\lambda)$ ha *incremento aleatorio a legge integrale*, perchè il modo di esaurirsi di X dopo l'istante λ_0 avrà un comportamento probabile dipendente non solo dall'energia $X(\lambda_0)$ nell'istante λ_0, ma da tutto il comportamento di X precedentemente all'istante λ_0.

Per chiarire ancora il significato dei tre diversi casi, osserviamo che - a prescindere dalla parte aleatoria della variazione, oppure considerando, in luogo delle variazioni aleatorie, delle variazioni necessarie - essi si riducono, oppure sono analoghi, al caso di una variabile ordinaria X la cui derivata X' dipenda rispettivamente

1) soltanto dall'istante λ: $X' = f(\lambda)$,

2) soltanto dall'istante λ e dalla stessa X: $X' = f(\lambda, X)$,

3) dal comportamento della X fino all'istante λ.

La classificazione è quindi analoga a quella data da VOLTERRA (*Fonctions de lignes*) per le leggi fisiche ordinarie.

2. Vediamo ora di dare al problema un'impostazione matematica.

Per riuscire a tale scopo, dovremo anzitutto trovare il modo di caratterizzare l'azione istantanea dei fattori aleatori: introdurre cioè un'operazione analoga a quella ordinaria di derivazione, che permette appunto di esprimere il comportamento istantaneo di una variabile sotto l'azione di cause che producono effetti rigorosamente determinabili. È questo anzi l'unico punto concettualmente nuovo da affrontare, e quindi il più interessante.

Potrebbe a prima vista sembrare che l'azione istantanea dei fattori aleatori che hanno influenza sull'incremento di X, potessero essere individuati assegnando la legge di probabilità della derivata di X, ma gli incrementi aleatori non tendono, in generale, a crescere linearmente intorno a un dato istante, tanto che una variabile X soggetta a variazioni acciden-

(1) Poichè X tende a zero per $\lambda \to \infty$, $X(\lambda) - X(\lambda_0)$ tende a $-X(\lambda_0)$ per $\lambda \to \infty$, ed è quindi assurdo matematicamente, oltre che fisicamente, supporre X funzione aleatoria a legge nota.

tali, non può avere in generale le derivate superiore e inferiore comprese fra limiti assegnati, comunque larghi. Dovremo battere quindi una via totalmente diversa, meglio aderente al significato concettuale della questione.

Non si perde nulla in generalità se, evitando inutili complicazioni di scrittura, ci si propone di studiare il comportamento di una funzione a incremento aleatorio $X(\lambda)$ per valori piccoli di λ, e sotto l'ipotesi che il valore iniziale sia nullo: $X(\lambda) = 0$ per $\lambda = 0$. Basta infatti eseguire un cambiamento nell'origine dei tempi e tener conto di tutti i fatti noti da cui la legge delle variazioni accidentali dipende, perchè la funzione a incremento aleatorio $X(\lambda) - X(\lambda_0)$ dal caso più generale si riduca al caso considerato.

Indichiamo con $\Phi_\lambda(\xi)$ e $\psi_\lambda(t) = \int e^{it\xi} d\Phi_\lambda(\xi)$ (1) rispettivamente la funzione di ripartizione e la funzione caratteristica della variabile casuale $X(\lambda)$, e cerchiamo di caratterizzare il loro comportamento asintotico per $\lambda \to 0$. Cercheremo a tal uopo precisamente di individuare, ove esista, una legge fissa di variazioni accidentali, che, per λ sufficientemente piccolo, differisca quanto poco si vuole dalla legge relativa alla X.

Consideriamo la legge di probabilità la cui funzione caratteristica è $[\psi_\lambda(t)]^n$, ove $\lambda = \frac{1}{n}$: essa è generata sommando n incrementi indipendenti soggetti alla stessa legge di probabilità dell'incremento all'istante $\lambda = \frac{1}{n}$. Se, facendo tendere n all'infinito, avremo una legge limite, ben a ragione la potremo dire *legge derivata* della legge relativa a $X(\lambda)$, per $\lambda = 0$. Analogamente infatti si ha $\lim_{n=\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = f'(0)$ per una funzione ordinaria tale che $f(0) = 0$, ossia, la somma di n incrementi uguali a quello subito da f fino all'istante $\frac{1}{n}$, è, al limite, la derivata di f.

Possiamo scrivere

$$\psi'_0(t) = \lim_{n=\infty} \left[\psi_{\frac{1}{n}}(t)\right]^n = \left[e^{\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\psi_\lambda(t)}\right]_{\lambda=0};$$

se X è funzione a incremento aleatorio a legge nota, porremo poi, e sarà evidente il significato sia del simbolo che del concetto:

$$\psi'_\lambda(t) = e^{\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\psi_\lambda(t)} \qquad , \qquad \Phi'_\lambda(\xi) - \Phi'_\lambda(0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-i\xi t}}{it}\psi'_\lambda(t)dt,$$

e avremo

$$\log\psi_\lambda(t) = \int_0^\lambda \log\psi'_\lambda(t)d\lambda.$$

(1) Integrale di STIELTJEG.

In particolare per una legge fissa ($\psi'_\lambda(t)$ indipendente da λ):

$$\log \psi_\lambda(t) = \lambda \log \psi'(t) .$$

Il problema più generale che abbiamo considerato nell'introduzione consiste allora nell'integrare la legge di probabilità $\Phi_\lambda(\xi)$, nota $\Phi'_\lambda(\xi)$ in funzione del comportamento di X precedente a λ. Nel caso di un incremento aleatorio a legge nota, il problema è senz'altro risolto dalle formole precedenti.

Rimarrebbe a esaminare se, ed eventualmente sotto quali ipotesi, la legge derivata *esiste*; del problema mi occuperò in una Nota successiva, ma ritengo di poter affermare fin d'ora che la legge derivata esiste *sempre*, se, come abbiamo supposto, $\log \psi_\lambda(t)$ è derivabile rispetto a λ.

3. Per chiarire il concetto della legge derivata sarà utile approfondire alquanto lo studio delle funzioni aleatorie a legge fissa, su cui la definizione essenzialmente si basa. In tal caso, abbiamo visto, è

$$\log \psi_\lambda(t) = \lambda \log \psi'(t) .$$

Una conseguenza facilissima e interessante è la seguente: *se la legge di probabilità* $\Phi_\lambda(\xi)$ *ha valor medio e valore quadratico medio finiti (almeno per uno, e quindi per tutti, i valori di* λ*), il valor medio di* X(λ) *cresce proporzionalmente a* λ *e lo scarto quadratico medio dalla media proporzionalmente a* $\sqrt{\lambda}$.

Detti infatti m e σ il valor medio e lo scossamento quadratico medio dalla media, è

$$\log \psi(t) = imt - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \text{termini d'ordine superiore} ,$$

da cui, indicando m_λ, σ_λ, il valor medio e lo scostamento quadratico medio dalla media di X(λ), si ha tosto

$$\lambda \left(i m_1 t - \frac{\sigma_1^2}{2} t^2 \right) = i m_\lambda t - \frac{\sigma_\lambda^2}{2} t^2 \quad , \quad m_\lambda = \lambda m_1 \quad , \quad \sigma_\lambda = \sqrt{\lambda}\, \sigma_1 .$$

Più in generale: *uno qualunque dei semi-invarianti di* THIELE (1), *(se è finito per almeno uno, e quindi per tutti, i valori di* λ*), cresce proporzionalmente a* λ.

Un esempio particolarmente interessante si ha ponendo

$$\psi'(t) = imt - \frac{\sigma^2}{2} t^2$$

che dà

$$\psi_\lambda(t) = i\lambda mt - \frac{\lambda\sigma^2}{2} t^2 :$$

(1) Cioè i coefficienti dello sviluppo di $\log \psi$ in serie di TAYLOR.

dopo un tempo λ, X segue la legge normale con valor medio λm e scostamento quadratico medio dalla media $\sqrt{\lambda}\sigma$.

Dimostriamo che una variabile X soggetta nel tempo a scarti accidentali dipendenti dall'azione di fattori che determinano una legge normale fissa, non può in generale avere finite in nessun punto le ordinarie derivate superiore e inferiore (1). Supponiamo infatti che per $\lambda < \varepsilon$ si abbia

$$|X(\lambda) - m\lambda| < M\lambda :$$

tale ipotesi ha sempre probabilità nulla, comunque grande si fissi il numero M.

Infatti il valor medio di $\{X(\lambda) - m\lambda\}^2$ è $\sigma_\lambda^2 = \lambda\sigma^2$; la probabilità che sia

$$|X(\lambda) - m\lambda| < M\lambda = \frac{M\sigma_\lambda}{\sigma}\sqrt{\lambda}$$

è

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{M}{\sigma}\sqrt{\lambda}}^{\frac{M}{\sigma}\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx < \frac{2M}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{\lambda}$$

e tende a zero con λ, qualunque sia M. La probabilità che la relazione sussista per ogni $\lambda < \varepsilon$ è minore di $\frac{2M}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{\lambda}$, qualunque sia λ, e quindi è nulla.

4. Benchè questi cenni siano di proposito estremamente sommari, spero possano dare un'idea abbastanza chiara della teoria delle funzioni a incremento aleatorio che su tali basi si potrebbe fondare e sviluppare ampiamente. E non sfuggirà l'interesse pratico di un tale ordine d'idee, ora che nelle leggi fisiche si tende sempre più a vedere soltanto l'espressione di una regolarità statistica.

(1) L'enunciato non è rigorosamente corretto; riprenderò questo punto in una Nota in preparazione.