L'EQUILIBRIO STABILE IN UN CAMPO DI VELOCITÀ.

In: « *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei* », Roma 1930, pp. 190-201.

BRUNO DE FINETTI

L'equilibrio stabile in un campo di velocità

Estratto dagli *Atti della Pont. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei*
Anno LXXXIII — Sessione IV 16 Marzo 1930

ROMA
SCUOLA TIPOGRAFICA PIO X
Via degli Etruschi, 7-9
1930

L'equilibrio stabile in un campo di velocità

Nota di **BRUNO de FINETTI**, presentata dal **S. O. GIOVANNI GIORGI**

Sunto. — Si definisce l'*equilibrio stabile* in un punto-zero di un campo di velocità, e si determinano le condizioni analitiche perchè esso abbia luogo.

Si abbia un punto Q soggetto a muoversi in un campo C con velocità **v** (P) assegnata in funzione del posto (e supporremo **v** funzione continua di P). Esso non potrà percorrere se non le *traiettorie* del *campo vettoriale* **v** (P), e la sua posizione a un dato istante sarà completamente determinata conoscendo la posizione iniziale.

È ovvio che le possibili posizioni d'equilibrio per il punto Q sono tutti e soli i punti-zero del campo vettoriale, ossia che, perchè il punto Q stia in quiete, è necessario e sufficiente che si trovi in un punto O per cui $\mathbf{v}(O) = 0$.

Un equilibrio può però essere *stabile* o *instabile*. E ci proponiamo appunto in questo lavoro, di studiare la *stabilità* di un tale equilibrio, chiarendo anzitutto il concetto, e determinando poi le condizioni analitiche.

Avrò occasione per ciò di sfruttare i risultati delle mie recenti note: « *Caratteristica di un'omografia vettoriale* », « *Studio delle omografie vettoriali in relazione alle radici di* $I_n(\alpha - x) = 0$ » e « *Sul comportamento di* $e^{\lambda\alpha}$, *e sul concetto di omografia stabile* » (1), che sviluppai appunto per tale scopo.

I.

Dicendo che una condizione d'equilibrio è *stabile* s'intende asserire, nel caso più generale e secondo il concetto più intuitivo, che le piccole perturbazioni che possono essere prodotte da cause accidentali non sono capaci che di

(1) Atti della Pont. Acc. delle Scienze Nuovi Lincei, Anno LXXXII - Fasc. supplettivo - 1929.

produrre effetti trascurabili e tendenti ad estinguersi. A parte il modo di misurare la «grandezza» della «causa» e dell' «effetto», si può precisare quest'idea dicendo che un equilibrio è stabile se, pur di supporre la «causa» sufficientemente piccola, si può esser certi che l'«effetto» sarà piccolo quanto si vuole, e tenderà ad estinguersi.

Quest'enunciato generalissimo e per ciò stesso alquanto vago basta completamente a suggerire la forma precisa che dovremo dare alla definizione di *punto d'equilibrio stabile* di un campo di velocità. Le perturbazioni possibili nel nostro caso non sono che gli spostamenti dalla posizione d'equilibrio, una perturbazione *abbastanza piccola* sarà uno spostamento che non conduce fuori da un certo intorno. E diremo quindi che:

Un punto-zero O *di un campo di velocità* $\mathbf{v}(P)$ *è un punto d'equilibrio stabile se, fissato comunque un intorno* σ *di* O, *esiste sempre un intorno* σ' *di* O, *(necessariamente compreso in* σ*) tale che se un punto mobile* Q *si trova inizialmente in* σ', *esso si muove tendendo verso* O, *e senza uscire mai da* σ.

Prima di trattare analiticamente il problema converrà discutere alquanto la definizione per chiarire qualche possibile dubbio. Potrebbe sembrare infatti, a prima vista, che la definizione si sarebbe potuta esprimere in forma più semplice dicendo ad es. che *esiste un intorno* σ *di* O *tale che, se un punto mobile* Q *si trova inizialmeute in* σ, *esso si muove tendendo verso* O (Condizione [I]). Ciò che equivale a dire: l'insieme delle traiettorie che *portano verso* O riempie un campo C_0 che racchiude O nel suo interno [1].

Tale condizione è necessaria (come è facile vedere), ma non è sufficiente: essa infatti sussiste in certi casi senza che l'equilibrio sia stabile. Abbiasi ad es. la circonferenza che limita il cerchio C, e consideriamo tutte le circonferenze interne, ad essa tangenti in un punto O (V. fig. 1). Il campo di velocità che ha come traiettorie tali linee, e le fa percorrere in senso concorde e con velocità assoluta proporzionale alla distanza da O, ha ovviamente in O l'unico punto di equilibrio. Un punto mobile, da qualunque posizione iniziale va a finire in O; se lo si sposta da O vi ritorna sempre, ma vi ritorna però dopo aver percorso *tutta una circonferenza,* e ciò per quanto piccolo potesse essere lo spostamento iniziale. L'equilibrio in O non è stabile.

[1] Nel senso che i punti di C esterni a tale campo C_0 non hanno O come punto limite. Nel senso topologico, O può anche essere sul contorno di C_0 e di C, come nell'esempio che segue; un esempio in cui O è interno anche nel senso topologico è quello analogo in cui C sia però una superficie sferica anzichè un cerchio.

Nell'esempio precedente esistevano traiettorie *uscenti* da O: dimostriamo che ciò basta ad escludere che l'equilibrio sia stabile. Sia l una traiettoria uscente da O, e fissiamo su di essa un punto A. Scegliamo un intorno σ di O che non racchiude A, e supponiamo che esista un intorno σ' di O quale voluto dalla definizione di equilibrio stabile. Sia B un punto di l compreso in σ', ed ivi si trovi inizialmente il punto mobile Q: la traiettoria di Q è allora la l, percorsa nel senso verso A, e passa per A, esterno a σ. Assurdo.

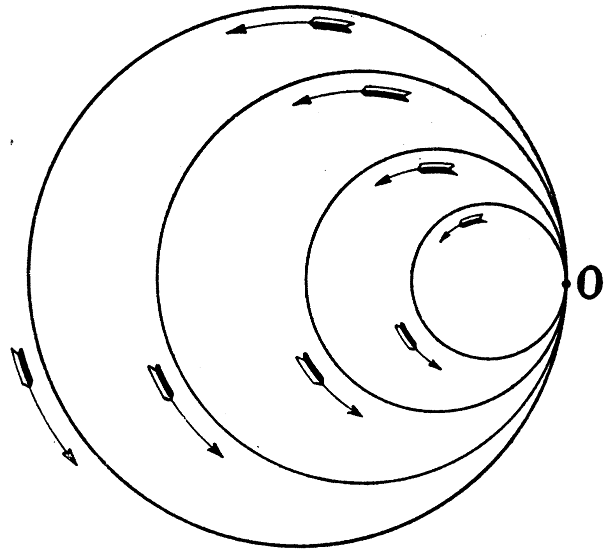

Fig. 1.

Si potrebbe credere che aggiungendo alla condizione [I] la seguente [II]: *non esistono traiettorie uscenti da* O, si ottenga una condizione non solo necessaria, come già sappiamo, ma anche sufficiente per la stabilità dell'equilibrio. Ciò non è però

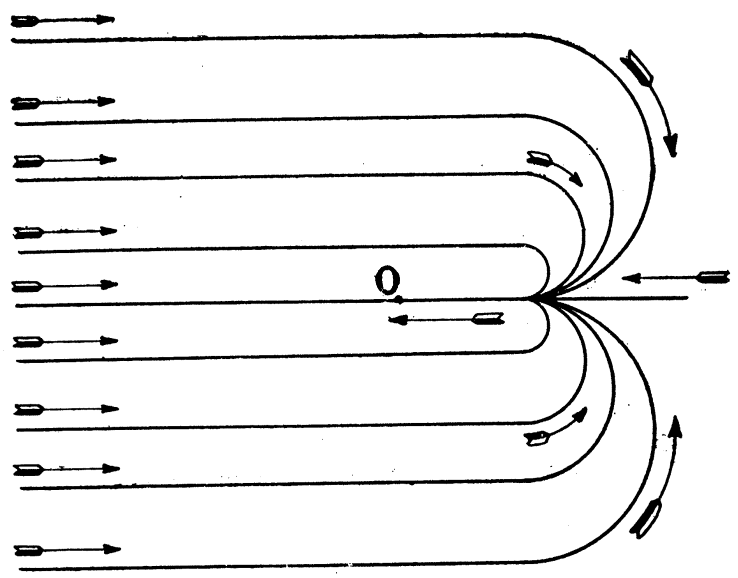

Fig. 2

esatto, come mostra la Fig. 2, senza bisogno di spiegazioni. Avvertiamo soltanto che la velocità è nulla unicamente in O, e fuori ha il senso delle frecce.

II.

Un criterio molto utile che assicura la stabilità di un punto d'equilibrio è costituito dall'esistenza di una funzione continua positiva $\varphi(P)$ del punto P, che si annulli soltanto per $P = O$, e tale che, almeno in un opportuno intorno σ_0 del punto O, tenda decrescendo a zero lungo tutte le traiettorie. Ciò significa ovviamente che se P_1 e P_2 sono due punti di una medesima traiettoria (compresi nell'intorno σ_0) e la legge del moto è tale che un punto mobile Q si muoverebbe nel senso da P_1 a P_2, deve risultare $\varphi(P_1) > \varphi(P_2)$, e che, assegnato comunque ε, si possa sempre trovare sulla traiettoria un punto P_3 tale che $\varphi(P_3) < \varepsilon$.

Dimostriamo che l'esistenza di una tale funzione $\varphi(P)$ basta a provare la stabilità dell'equilibrio. Sia σ un intorno di O, che potremo supporre compreso in σ_0, e sia c il limite inferiore di φ nei punti esterni a σ: c è certamente positivo, perchè la φ è continua e non si annulla che in O, interno a σ. L'insieme σ' dei punti di σ per cui $\varphi(P) < \frac{1}{2}c$ è un intorno di O, perchè se O non vi fosse interno sarebbe punto-limite di punti in cui $\varphi(P) \geq \frac{1}{2}c$, e sarebbe anche $\varphi(O) \geq \frac{1}{2}c$ mentre è invece $\varphi(O) = 0$. Ma se il punto mobile Q si trova inizialmente in σ', esso si muove tendendo ad O senza uscire mai da σ' (e a fortiori senza uscire mai da σ), altrimenti dovrebbe passare per dei punti in cui $\varphi > \frac{1}{2}c$, il che è assurdo.

È a tale criterio — lo diremo: della *funzione stabilizzante* — che c'informeremo per giungere alle cercate conclusioni.

III.

Nella ricerca delle condizioni analitiche per la stabilità di un equilibrio in un punto-zero O di un campo di velocità $\mathbf{v}(P)$ ci limiteremo al caso in cui il campo C sia uno spazio lineare S_n a un numero finito n di dimensioni, ed esista in O l'omografia «*derivata di* $\mathbf{v}$ *rispetto al punto*». Supporremo cioè che esista l'omografia

$$\alpha = \left[\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right]_{P=0}$$

tale che, assegnato comunque ε, esista ϑ tale che

$$\left| \frac{\mathbf{v}(P)}{|P-O|} - \frac{\alpha(P-O)}{|P-O|} \right| < \varepsilon$$

pur di prendere

$$|P-O| < \vartheta .$$

Con locuzione intuitiva, se pure poco precisa, possiamo esprimere tale fatto dicendo che nelle vicinanze di O si ha in prima approssimazione

$$\mathbf{v}(P) = \alpha(P-O) ,$$

e si è indotti a prevedere che l'equilibrio sarà stabile se sarà *stabile* l'omografia α (¹). Giungeremo effettivamente a tale conclusione provando che, quando l'omografia α è stabile, la « lunghezza » $s(P)$ dell'arco di traiettoria del campo $\alpha(P-O)$ dal punto P sino al punto O *è una funzione stabilizzante* per tutti i campi vettoriali $\mathbf{v}(P)$ che, nelle vicinanze di O, sono in prima approssimazione assimilabili ad $\alpha(P-O)$.

Dobbiamo però osservare a questo punto che non ci siamo finora occupati di concetti *metrici,* ma soltanto di concetti *omografici* (²) e non possiamo quindi parlare senz'altro di *lunghezza* d'una linea. Nè, per il nostro scopo, è opportuno pensare che nello spazio S_n sia assegnata a priori una metrica. Per rendere l'idea in forma intuitiva: in uno spazio lineare possiamo riconoscere *gli ellissoidi*: scegliendo uno di essi ad arbitrio e chiamandolo *sfera* (o *sfera di raggio unitario,* volendo determinare anche l'unità di misura) si stabilisce in S_n *una metrica.* Ciò equivale, dal punto di vista algoritmico, a introdurre

(¹) Cfr. la nota citata « *Sul comportamento di* $e^{\lambda\alpha}$, ecc. »

(²) Cfr. per questa distinzione la mia nota « *Sulle operazioni dell'Analisi Vettoriale che non dipendono dalle nozioni metriche* », Atti Pont. Acc. di Scienze Nuovi Lincei, Anno LXXXII, Sess. VI del 19 maggio 1929. — Per non utilizzare affatto i concetti metrici non avremo potuto, a rigore, parlare del *modulo* $|P-O|$ di un vettore $P-O$ (v. sopra, in questa stessa pagina). Si osserverà però che per lo scopo che ivi ci interessava l'uso di una *qualunque* metrica è sempre equivalente.

un'operazione « $\times$ » di *prodotto scalare* fra vettori in modo che

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

sia un numero funzione lineare simmetrica di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (proprietà simmetrica e distribuitiva) e inoltre si abbia sempre $\mathbf{u} \times \mathbf{u} > 0$ a meno che $\mathbf{u} = 0$.

Per determinare completamente un'operazione $\times$ basta prendere n vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ e porre

$$\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}.$$

Si tratta cioè di assumere come vettori «unitari ortogonali» n vettori linearmente indipendenti fissati ad arbitrio (scelta questa che equivale a quella precedente della «sfera di raggio uno»).

Per il problema che ora ci occupa, conviene assumere come vettori unitari ortogonali n vettori indipendenti $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ appartenenti agli spazi invarianti isolati di α.

Un punto mobile Q che si muova con velocità $\alpha(Q - O)$, e che si trovi inizialmente nel punto P, si trova nell'istante λ nella posizione

$$Q(\lambda) = O + e^{\lambda\alpha}(P - O);$$

possiamo scrivere

$$e^{\lambda\alpha}(P - O) = f_1(\lambda) \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + f_n(\lambda) \cdot \mathbf{a}_n$$

ove le $f_1 \dots f_n$ sono funzioni del tipo determinato nella nota « *Sul comportamento di* $e^{\lambda\alpha}$, ecc. » (1), e l'elemento di arco ds percorso nel tempo $d\lambda$ risulta

$$ds = \sqrt{[f'_1(\lambda)]^2 + \dots + [f'_n(\lambda)]^2}\, d\lambda.$$

(1) A tale nota rimando per la definizione e le proprietà che ci occorrono di $e^{\lambda\alpha}$. A proposito della definizione, ivi attribuita al Giorgi, il Prof. Cassina mi ha cortesemente avvertito che essa è dovuta al Peano che ha definito e adoperato la funzione $e^{\lambda\alpha}$ sin dal 1887 (Vedi « *Atti Torino* » 1887, e anche « *Calcolo geometrico* », 1888, pag. 150). La definizione del Peano era però fondata sullo sviluppo in serie, a riguardo del quale il Giorgi ha sollevato alcune obbiezioni di principio.

Le funzioni $f_i(\lambda)$, e quindi anche le $f'_i(\lambda)$, sono funzioni del tipo $e^{\lambda a}\psi(\lambda)$, ove $\psi(\lambda)$ cresce in ogni caso meno rapidamente di λ^{n+1} ed a è la parte reale di una delle radici della *equazione fondamentale* $\mathrm{I}_n(\alpha - x) = 0$. Se α è omografia stabile, se cioè quelle radici hanno tutte la parte reale negativa, potremo prendere c negativo e minore in valore assoluto di tutte queste parti reali di radici: in tale ipotesi la funzione $e^{c\lambda}$ tenderà a zero, per $\lambda \to \infty$, meno rapidamente di tutte le $f'_i(\lambda)$, e anche, quindi, della loro media quadratica. Per λ superiore a un certo valore l sarà allora

$$ds < e^{c\lambda}\, d\lambda$$

e quindi

$$\int_l^{\infty} \frac{ds}{d\lambda}\, d\lambda < \int_l^{\infty} e^{c\lambda} d\lambda = \left[\frac{1}{c}\, e^{c\lambda}\right]_l^{\infty} = \frac{1}{|c|}\, e^{cl}.$$

Ciò prova che, partendo da una posizione iniziale P qualunque, il punto mobile Q percorre sempre, nell'avvicinarsi asintoticamente ad O, un arco di lunghezza *finita*.

IV.

Sappiamo a questo punto che la funzione $s(\mathrm{P})$, lunghezza dell'arco di traiettoria PO, è una funzione positiva finita che si annulla per $\mathrm{P} = \mathrm{O}$. Dimostriamo ancora che è continua, e allora potremo affermare senz'altro che essa è una funzione stabilizzante per il campo di velocità $\alpha(\mathrm{P} - \mathrm{O})$. In seguito rimarrà a verificare che lo è ancora per ogni campo $\mathbf{v}(\mathrm{P})$ assimilabile ad $\alpha(\mathrm{P} - \mathrm{O})$ in prima approssimazione nelle vicinanze di O.

Calcoliamo all'uopo

$$d\mathrm{Q} = de^{\lambda\alpha}(\mathrm{P} - \mathrm{O}) = \alpha e^{\lambda\alpha}(\mathrm{P} - \mathrm{O})\, d\lambda \ , \quad ds = |d\mathrm{Q}| = |\alpha e^{\lambda\alpha}(\mathrm{P} - \mathrm{O})|\, d\lambda$$

(ove

$$|\mathbf{u}| = \mathrm{mod}\ \mathbf{u} = \sqrt{\mathbf{u} \times \mathbf{u}})$$

$$s(\mathrm{P}) = \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\lambda}\, d\lambda = \int_0^{\infty} |\alpha e^{\lambda\alpha}(\mathrm{P} - \mathrm{O})|\, d\lambda\ .$$

A meno di un termine di second'ordine rispetto a $d\mathbf{u}$ (minore di $|d\mathbf{u}|^2 : |\mathbf{u}|$) è poi

$$|\mathbf{u}+d\mathbf{u}| = |\mathbf{u}| + \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \times d\mathbf{u}$$

e quindi

$$s(P+dP) - s(P) = \int_0^\infty \{|\alpha e^{\lambda\alpha}(P+dP-O)| - |\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O)|\} d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O) \times \alpha e^{\lambda\alpha} dP}{|\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O)|} d\lambda$$

od anche

$$\mathrm{grad}_P\, s \times \mathbf{u} = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O) \times \alpha e^{\lambda\alpha}\mathbf{u}}{|\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O)|} d\lambda$$

poichè la formula precedente assicura che la s è continna e il gradiente esiste.

Osserviamo che $\mathrm{grad}_P s$ è costante sulle semirette uscenti da O, e uguale e di segno opposto su semirette opposte. Ciò si vede subito moltiplicando $(P-O)$ per un numero reale qualunque, positivo o negativo. Appare anche che $\mathrm{grad}_P s$ è funzione continua di P (all'infuori che in O), e quindi $|\mathrm{grad}_P s|$ è funzione limitata su un'ipersfera di centro O: $|\mathrm{grad}_P s| < G$, e allora per la proprietà precedente si ha in tutto lo spazio

$$|\mathrm{grad}_P s| < G.$$

Altra proprietà che le formule mettono in evidenza è che s è funzione lineare lungo ogni semiretta uscente da O, e che quindi

$$\frac{s(P)}{|P-O|}$$

è costante su ciascuna delle rette uscenti da O. Tale rapporto è ovviamente ≥ 1, e un ragionamento analogo al precedente mostra che è superiormente limitato, e si ha cioè in tutto lo spazio

$$1 \leq \frac{s(P)}{|P-O|} < H.$$

Per lo stesso motivo, se α è omografia propria (e lo è di certo se è stabile), esiste anche un numero $K > 0$ tale che in tutto lo spazio

$$\frac{|\alpha(P-O)|}{|P-O|} > K$$

e ne risulta

$$|\alpha(P-O)| > K\,|P-O| > M\,s(P)$$

ove

$$M = \frac{K}{H}\,.$$

V.

Se una funzione positiva continua φ, nulla in O, ammette il gradiente, per dimostrare che è funzione stabilizzante del campo $\mathbf{v}(P)$ basta dimostrare che è, almeno in un intorno σ di O,

$$\mathbf{v}(P) \times \operatorname{grad}_P \varphi < -as(P) \qquad \text{con } a > 0\,.$$

Infatti

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dQ} \cdot \frac{dQ}{d\lambda} = \operatorname{grad}_P \varphi \times \mathbf{v}(P)$$

e quindi la $\mathbf{v} \times \operatorname{grad} \varphi < 0$ assicura $\left(\frac{ds}{d\lambda} > 0\right)$ che la s è decrescente, e dalla $ds < -asd\lambda$ scende (per λ contato a partire da una posizione iniziale compresa in σ)

$$\begin{aligned} \log s(\lambda) - \log s(0) &< -a\lambda, \\ \log s(\lambda) &\to -\infty, \\ s(\lambda) &\to 0, \\ \text{per } \lambda &\to \infty. \end{aligned}$$

Per dimostrare analiticamente (benchè non ve ne sia il bisogno, atteso il significato di s) che $s(P)$ è una funzione stabilizzante del campo di velocità $\alpha(P-O)$ non c'è che calcolare

$$\operatorname{grad}_P s \times \alpha(P-O),$$

che, per il significato stesso di s, dovrà dare la velocità assoluta cambiata di segno.

E infatti

$$\mathrm{grad}_P s \times \alpha(P-O) = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O) \times \alpha^2 e^{\lambda\alpha}(P-O)}{|\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O)|} d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\frac{d}{d\lambda}\left[\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O)\right]^2}{2\,|\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O)|} d\lambda = \int_a^0 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = [\sqrt{x}]^0_a = -\sqrt{a}$$

ove

$$a = [\alpha e^{\lambda\alpha}(P-O)]^2_{\lambda=0} = [\alpha(P-O)]^2$$

ossia appunto

$$\mathrm{grad}_P s \times \alpha(P-O) = -\,|\alpha(P-O)|\,,$$

e quindi

$$\mathrm{grad}_P s \times \alpha(P-O) < -\,\mathrm{M}\,s(P).$$

I calcoli ora svolti mostrano che il campo di velocità $\alpha(P-O)$, ove α è omografia stabile, ha effettivamente nel punto O un punto d'equilibrio stabile. Mostriamo ora che ciò sussiste — come già abbiamo accennato — anche quando ci si riferisca, anzichè al campo di velocità $\alpha(P-O)$, a un campo di velocità $\mathbf{v}(P)$ tale che, assegnato comunque ε, esista ϑ tale che

$$\left|\frac{\mathbf{v}(P)}{|P-O|} - \frac{\alpha(P-O)}{|P-O|}\right| < \varepsilon$$

ogni qualvolta sia

$$|P-O| < \vartheta\,.$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathrm{grad}_P s$, ove si ricordi il risultato precedente:

$$\mathrm{grad}_P s \times \frac{\mathbf{v}(P)}{|P-O|} + \frac{|\alpha(P-O)|}{|P-O|} < \varepsilon\,|\mathrm{grad}_P s| < \varepsilon G\,,$$

$$\mathrm{grad}_P s \times \mathbf{v}(P) < (\varepsilon G - K)\,|P-O| < \frac{\varepsilon G - K}{H}\,s(P)\,,$$

e, pur di prendere $\varepsilon < \frac{K}{G}$ e il ϑ corrispondente a tale ε, risulta che entro l'ipersfera $| P - O | < \vartheta$ è sempre

$$\mathrm{grad}_P\, s \times \frac{\mathbf{v}(P)}{| P - O |} < -as(P), \text{ con } a > 0 \,, \qquad c.\ d.\ d.$$

Si conclude così che: *perchè il punto-zero* O *di un campo di velocità* $\mathbf{v}(P)$ *sia punto d'equilibrio stabile è sufficiente che esista l'omografia derivata*

$$\alpha = \left[\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right]_{P=O},$$

e sia un'omografia stabile. E cioè che le radici dell'equazione fondamentale $I_n(\alpha - x) = 0$ *abbiano tutte la parte reale negativa.*

VI.

Rimarrebbe a stabilire se inversamente quando $I_n(\alpha - x)$ ammette qualche radice colla parte reale positiva si possa escludere che l'equilibrio sia stabile. Ciò risulta ovvio quando il campo di velocità sia il campo $\alpha(P - O)$, perchè tutte le sue traiettorie contenute negli spazi invarianti isolati di α corrispondenti a radici con parte reale positiva *escono* da O. Si può presumere che la stessa conclusione valga in generale, e che si possa ottenere una traiettoria uscente da O cercando la posizione limite della traiettoria passante per $O + \rho\mathbf{a}$ quando $\rho \to 0$ ed ove $\mathbf{a}$ appartenga ad uno dei sopraddetti spazi invarianti isolati.

Quando non esistono radici a parte reale positiva, ma ne esistono con parte reale nulla (e cioè nulle o pure imaginarie) si vede facilmente che si ha ambiguità. Si considerino ad esempio i due campi di velocità

$$\mathbf{v}(P) = | P - O | (P - O), \qquad \mathbf{v}(P) = - | P - O | (P - O).$$

Per entrambi è $\alpha = 0$, e O è punto d'equilibrio instabile per il primo e stabile per il secondo.

Colle debite riserve sull'ultima parte dell'enunciato, di cui abbiamo soltanto abbozzato una possibile traccia di dimostrazione, si potrebbe, ricapitolando, concludere:

se O *è un punto d'equilibrio* ($\mathbf{v}(O) = 0$) *per il campo di velocità* $\mathbf{v}(P)$, *ed esiste in* O *l'omografia derivata* α *della velocità rispetto al punto, l'equilibrio* **è stabile,** *o* **si ha ambiguità,** *o* **non è stabile,** *a seconda che le radici di* $I_n(\alpha - x) = 0$ *hanno tutte la parte reale* **negativa,** *o ve n'è con la parte reale* **nulla** (*e non con parte reale positiva*), *o ve n'è con la parte reale* **positiva.**