

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI A INCREMENTO ALEATORIO.

In: « *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei* », 1929, vol. X, fasc. 11, pp. 548-553.

Calcolo delle probabilità. — *Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio.* Nota di B. DE FINETTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sia $X(\lambda)$ una funzione a incremento aleatorio⁽²⁾, capace di variare soltanto con continuità, e soggetta a legge fissa. Rammentiamo brevemente la definizione: ciò significa che gli incrementi di X in n intervalli uguali successivi sono variabili casuali indipendenti soggette a una medesima legge di probabilità.

La X essendo per ipotesi funzione continua di λ , è certo che esiste l'integrale di X in un dato intervallo $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, e, poichè la X dipende dal caso, anche il valore di tale integrale sarà una variabile casuale. Si può determinare la sua legge di probabilità? Ecco il problema che ci proponiamo di esaminare.

1. È, per la continuità di $X(\lambda)$:

$$\int_0^\lambda X(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n X\left(\frac{i}{n} \lambda\right).$$

Diremo $S_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n X\left(\frac{i}{n} \lambda\right)$ valore approssimato n -esimo dell'integrale; poichè di S_n è facile determinare la legge di probabilità, e si vede subito che essa tende a una legge limite quando $n \rightarrow \infty$, è spontanea l'idea di studiare questa legge limite, e cercare poi se essa effettivamente debba rappresentare la legge di probabilità dell'integrale.

L'espressione ora scritta di S_n non si presta a dedurre la sua legge di probabilità, perchè i termini della somma non sono variabili casuali indipendenti; tale condizione si può realizzare però mediante una facile trasfor-

(1) Nella seduta del 1^o dicembre 1929.

(2) Vedi *Sulle funzioni a incremento aleatorio e Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori*, «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», 1929, 2^o sem.

mazione. Basta esprimere S_n linearmente mediante $X(0)$ e gli n incrementi indipendenti $X\left(\frac{h}{n}\lambda\right) - X\left(\frac{h-1}{n}\lambda\right)$ ($h = 1, 2, \dots, n$):

$$S_n = \lambda X(0) + \frac{\lambda}{n} \sum_{h=1}^n (n-h+1) \left[X\left(\frac{h}{n}\lambda\right) - X\left(\frac{h-1}{n}\lambda\right) \right] = \lambda X_0 + \frac{\lambda}{n} \sum_{k=1}^n k \Delta_{n,k}$$

ove

$$\Delta_{n,k} = X\left(\frac{h}{n}\lambda\right) - X\left(\frac{h-1}{n}\lambda\right) \quad \text{con} \quad k = n - h + 1.$$

La funzione caratteristica dei Δ , cioè degli incrementi di X negli intervalli di lunghezza $\frac{\lambda}{n}$, è $\psi_{\frac{\lambda}{n}}(t)$, e la funzione caratteristica di $\frac{\lambda}{n} k \Delta$ è quindi $\psi_{\frac{\lambda}{n}}\left(\frac{\lambda k}{n} t\right)$; poichè

$$\log \psi_{\frac{\lambda}{n}}(t) = \frac{\lambda}{n} \log \psi(t) \quad (\text{ove } \psi = \psi_{\lambda} \text{ per } \lambda = 1)$$

abbiamo

$$\log \psi_{\frac{\lambda}{n}}\left(\frac{\lambda k}{n} t\right) = \frac{\lambda}{n} \log \psi\left(\frac{\lambda k}{n} t\right).$$

Il logaritmo della funzione caratteristica di S_n è quindi

$$\log \chi(\lambda t) + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{n} \log \psi\left(\frac{\lambda k}{n} t\right) = \log \chi(\lambda t) + \frac{1}{t} \cdot \frac{\lambda t}{n} \sum_{k=1}^n \log \psi\left(\frac{k}{n} \lambda t\right),$$

ove con $\chi(t)$ si rappresenti la funzione caratteristica di $X(0)$. Supporremo in seguito che sia noto il valore iniziale $X(0) = c$, e allora $\chi(t) = e^{ict}$.

Per dimostrare che quando $n \rightarrow \infty$ la legge di probabilità di S_n tende a una legge limite, basta dimostrare che la funzione caratteristica tende uniformemente in ogni intervallo finito a una funzione limite, e che la probabilità che sia $|S_n| > \xi$ tende a zero per $\xi \rightarrow \infty$ in modo uniforme rispetto ad n (1).

La seconda condizione è certo soddisfatta, perchè, qualunque sia n , S_n è inferiore al massimo di X moltiplicato per l'ampiezza dell'intervallo d'integrazione; per $n \rightarrow \infty$ la funzione caratteristica di S_n tende poi verso $\Psi_{\lambda}(t)$ definita da

$$\begin{aligned} \log \Psi_{\lambda}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ic\lambda t + \frac{1}{t} \cdot \frac{\lambda t}{n} \sum_{k=1}^n \log \psi\left(\frac{k}{n} \lambda t\right) \right] = \\ &= ic\lambda t + \frac{1}{t} \int_0^{\lambda t} \log \psi(t) dt, \end{aligned}$$

(1) La dimostrazione dell'esistenza della legge limite sotto le ipotesi accennate si trova in Appendice alla mia Memoria: *Funzione caratteristica d'un fenomeno aleatorio*, in corso di stampa nelle « Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei ».

e ciò in modo uniforme rispetto a t , perchè la funzione integranda è uniformemente continua in ogni intervallo finito.

2. La legge limite esiste. Si tratta ora di vedere se la legge limite di S_n è effettivamente la legge di probabilità di $S = \int_0^\lambda X(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

A tale conclusione si arriva sicuramente se è possibile assegnare alla differenza $|S_n - S|$ un limite superiore a_n tendente a zero col crescere di n , o, più in generale, se la successione delle S_n , soddisfa una condizione che diremo della *convergenza stocasticamente-uniforme* ⁽¹⁾. Diremo che la successione S_n tende a S in modo stocasticamente-uniforme se, assegnati due numeri ε e θ comunque piccoli, si può sempre fissare n in modo che sia minore di θ la probabilità che si abbia $|S_n - S| > \varepsilon$.

Lo studio teorico di tale condizione, lo sto sviluppando in altro lavoro ⁽²⁾, dove ho anche abbozzato un procedimento per giungere a provare che la convergenza è, nel nostro caso, stocasticamente uniforme. Credo effettivamente ciò possa provarsi in generale, e per quella via. Mi limito qui ad accennare, tanto per chiarire le idee, a un caso semplicissimo. Se $X(\lambda)$ è essenzialmente non decrescente, è certo $|S_n - S| \leq \frac{l\Delta}{n}$, ove Δ è l'incremento di X nell'intervallo d'integrazione $(0, l)$. Potendosi prendere ξ abbastanza grande perchè la probabilità che sia $\Delta > \xi$ risulti $< \theta$, ed n abbastanza grande perchè sia $\frac{l\Delta}{n} < \varepsilon$, si prova che la convergenza è stocasticamente uniforme.

Senza per ora occuparci più oltre di questo punto, studieremo la legge di probabilità dell'integrale S nel caso che essa sia la legge limite di quella relativa a S_n , caso che presumibilmente è il più generale che possa aversi, e che, comunque, comprende di certo almeno le funzioni essenzialmente non decrescenti.

3. Poniamo $Y(\lambda) = \int_0^\lambda X(\lambda) d\lambda$. La Y è una funzione a incremento aleatorio, ma presenta dei caratteri profondamente diversi da quelli che si avevano nei casi considerati finora. Essa è infatti derivabile, e la sua derivata obbedisce a una ben determinata legge di probabilità ed è una funzione continua ⁽³⁾.

(1) *Stocasticamente* = « nel senso del calcolo delle probabilità »: locuzione usata specialmente dallo SLUTSKY che la fa risalire a BERNOULLI.

(2) *Sui passaggi al limite nel calcolo delle probabilità*, presentato al R. Ist. Lombardo.

(3) Ciò che invece non può verificarsi (a rigore: ha probabilità nulla di verificarsi) per una funzione a incremento aleatorio a legge nota (o anche a legge differenziale). Per quanto riguarda la continuità della derivata, l'asserto scende ovviamente dalla stessa definizione, che esclude che debbano sussistere delle relazioni d'interdipendenza fra gli incre-

Di modo che in un intervallo brevissimo di tempo $(\lambda, \lambda + \delta)$ l'incremento di Y è con certezza pratica sensibilmente uguale a $\delta Y'(\lambda)$, ove $Y'(\lambda)$ è la derivata di Y nell'istante λ , che nell'istante λ è già determinata, in quanto può calcolarsi alla sua sinistra, e non ha quindi più nulla d'aleatorio. I fattori aleatori non intervengono che in quanto influiscono sulla derivata, agiscono cioè sul modo di variare di Y soltanto per mezzo dei termini d'ordine superiore al primo.

Ciò è messo bene in luce dal calcolo della legge derivata:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \Psi_{\lambda}(t) \right]_{\lambda=0} = ict + \lim_{\lambda=0} \frac{1}{\lambda t} \int_0^{\lambda t} \log \psi(t) dt = ict$$

(essendo $\psi(0) = 1$, $\log \psi(0) = 0$).

Altri rilievi interessanti possiamo fare supponendo $\log \psi(t)$ sviluppabile in serie di TAYLOR; allora lo è anche $\log \Psi_{\lambda}(t)$, e, posto

$$\log \psi(t) = \sum_1^{\infty} a_b t^b,$$

abbiamo

$$\log \Psi_{\lambda}(t) = ic\lambda t + \frac{1}{t} \sum_1^{\infty} a_b \frac{(\lambda t)^{b+1}}{b+1} = ic\lambda t + \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^{b+1}}{b+1} a_b t^b.$$

Considerando i due primi termini

$$\log \psi(t) = imt - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

si ha

$$\log \Psi_{\lambda}(t) = iM_{\lambda} t - \sum_{\lambda}^2 \frac{t^2}{2} + \dots = i \left(c\lambda + m \frac{\lambda^2}{2} \right) - \sigma^2 \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{t^2}{2} + \dots$$

e quindi

$$M_{\lambda} = c\lambda + m \frac{\lambda^2}{2} \quad \sum_{\lambda} = \sigma \sqrt{\frac{\lambda^3}{3}}.$$

menti passati e quelli futuri. Di più, lo studio delle derivate non si può nemmeno - in quel caso - abordar, perchè, considerato un intervallo (λ_1, λ_2) comunque piccolo, è sempre impossibile (ha probabilità nulla) l'ipotesi che in tutto (λ_1, λ_2) le derivate estreme della X non superino in valore assoluto un numero prefissato comunque grande. Si dimostra precisamente che, fissato comunque il numero M , l'ipotesi che negli n intervalli $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, \dots , $\left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$ l'incremento di X sia sempre minore in valore assoluto di $\frac{M}{n}$ ha probabilità minore di $\frac{4}{3} \omega\left(\frac{4M}{\sqrt{n}}\right)$, ove $\omega(\delta)$ è il modulo di continuità della funzione di ripartizione (che è continua, come risulta dalla Nota citata, *Sulla possibilità di valori eccezionali*, ecc.), e poichè tale limite tende a zero al crescere di n , ne discende agevolmente la proprietà enunciata.

Il valore probabile M_λ contiene un termine dipendente dal valore iniziale di X (valore dell'integrale se X rimanesse costante) proporzionale al tempo λ , e uno, dovuto alle variazioni accidentali, proporzionale al quadrato di λ ; lo scarto quadratico medio cresce poi come $\lambda^{3/2}$. Si ricorderà che per le funzioni a incremento aleatorio a legge fissa il valore probabile e lo scarto quadratico medio crescono invece rispettivamente come λ e come $\sqrt{\lambda}$ (1).

4. Consideriamo ad esempio un grave in caduta libera. Lo spazio Y percorso in un tempo λ è, secondo le equazioni classiche, in cui nulla interviene di aleatorio (e cioè *deterministe*):

$$Y(\lambda) = X_0 \lambda + \frac{g}{2} \lambda^2 = f(\lambda)$$

e la velocità

$$X(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = X_0 + g\lambda.$$

In realtà, quando lascio cadere un grave, non posso dire però che esso *deve* cadere secondo la legge di GALILEO, ma solo che prevedo che *probabilmente* e *press'a poco* sarà seguita la legge di GALILEO (1). Tenendo conto di quest'osservazione, lo spazio percorso in un intervallo $\Delta\lambda$, ossia l'incremento ΔY di Y da λ a $\lambda + \Delta\lambda$, sarà, non diremo più *certamente uguale*, ma *probabilmente prossimo* a Δf . Sarà cioè una variabile casuale che ha una probabilità molto prossima ad 1 di differire da Δf per meno di una quantità ϵ praticamente trascurabile.

Se i successivi incrementi di Y si considerano indipendenti (Y funzione a incremento aleatorio a legge fissa) la velocità istantanea non esiste; se invece si ammette l'esistenza della velocità istantanea X , e si considerano come indipendenti i successivi incrementi di X , allora è soltanto l'accelerazione istantanea che non esiste (vedi nota 3 a p. 550). Per la comodità dell'algoritmo, è certamente preferibile la seconda impostazione, che ci consente di parlare della velocità, ma è stato osservato più volte, e con ragione, che una grandezza o una funzione empirica non è fisicamente determinata, o quanto meno non

(1) Queste conclusioni sussistono anche senza che $\log \psi$ sia sviluppabile in serie di TAYLOR, purchè esistano e siano finiti m e σ .

Più in generale, basta sapere che è

$$\log \psi(t) = imt - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \dots + a_n t^n + \omega(t)$$

con $\omega(t)$ infinitesimo d'ordine superiore ad n per concludere che è

$$\log \Psi_\lambda(t) = i \left(c\lambda + m \frac{\lambda^2}{2} \right) t - \sigma^2 \frac{\lambda^3}{3} \frac{t^2}{2} + \dots + a_n \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} t^n + \Omega(t)$$

con $\Omega(t) = \frac{\lambda}{\lambda t} \int_0^{\lambda t} \omega(t) dt$ infinitesimo d'ordine superiore ad n .

(1) Cfr. POINCARÉ, *La Valeur de la Science*, pp. 235 e 237. In altri esempi, più schiettamente pertinenti alla meccanica statistica, il carattere probabilistico e approssimativo del concetto di « legge naturale » sarebbe più evidente. Ho preferito, come esempio a scopo puramente illustrativo, quello più elementare.

può essere mai sperimentalmente nota, con perfetta esattezza. Chiedere quindi se esiste la derivata — nel caso nostro se esiste la velocità istantanea — non ha senso.

Bisogna risalire al significato concettualmente interessante della differenza d'impostazione. Nel secondo caso ammettiamo che per inerzia si conservi un eventuale eccesso di velocità casualmente acquisito (sommandosi agli incrementi futuri che avremmo previsti indipendentemente da esso); nel primo caso invece, la conoscenza di una velocità (media) acquisita ci sembra senza influenza sulla previsione. È per ciò che è il secondo modo che risponde al problema.

L'« accelerazione di gravità » g sarà per noi l'« accelerazione probabile di gravità », ossia il valore probabile dell'aumento di velocità nell'unità di tempo. Ammettiamo però che nella pratica tale aumento si potrà scostare dal valore probabile g , e sia σ il valore quadratico medio di tale « errore » o « scarto » (σ misura la *precisione* con cui supponiamo la caduta dei gravi obbedisca alla legge di GALILEO, precisione tanto maggiore quanto più σ è piccola).

Potremo dire allora che lo spazio percorso all'istante λ e la rispettiva velocità sono approssimativamente quelle volute dalla legge di GALILEO; l'errore, o *scostamento*, o, con locuzione usata in caso analogo dal Lévy, la *parte del caso* (*la partie du hasard*) ha l'or-

dine di grandezza rispettivamente di $\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{3}} \sigma$ e di $\sqrt{\lambda} \sigma$.