MAT0164 - Números Inteiros: Uma Introdução à Matemática - 2019

Primeira Lista de Exercícios

1. Prove, usando indução finita, que, para todo inteiro $n \geq 1$,
   (a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$,
   (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Seja n um inteiro positivo. Mostre que
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$
3. Prove, por indução finita, que
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$
   para todo inteiro positivo n.
4. (a) Calcule a soma dos n primeiros números pares positivos.
   (b) Calcule a soma dos n primeiros números ímpares positivos.
   (c) Prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de termo inicial a e razão $r \neq 1$ é dada por
$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$
5. Prove, por indução finita, que
   (a) $n < 2^n$, para todo $n \geq 0$;
   (b) se x é um número real positivo fixado, então $(1+x)^n > 1 + nx$, para todo $n \geq 2$.
6. Mostre que
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n},$$
   para todo inteiro positivo n. (*Sugestão:* É mais fácil demonstrar a igualdade usando a definição combinatória do número $\binom{2n}{n}$ e o fato $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ do que usando o princípio de indução finita.)
7. Sejam a e b inteiros distintos. Mostre que, para todo inteiro positivo n, $a - b$ divide $a^n - b^n$, e $a + b$ divide $a^n + (-1)^{n-1} b^n$.
8. Prove que $3^{2n} - 1$ é divisível por 8, para todo inteiro positivo n.
9. Seja n um inteiro não-negativo. Mostre de duas maneiras diferentes que $2^{4n} - 1$ é múltiplo de 15. (*Sugestão:* Faça uma demonstração direta e outra por indução em n.)
10. Para todo inteiro $n \geq 1$, prove que
   (a) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x}$;
   (b) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. (*Sugestão:* Use o item anterior)
11. Prove que
$$\binom{s}{s} + \binom{s+1}{s} + \cdots + \binom{n}{s} = \binom{n+1}{s+1},$$
   para todo inteiro $s \geq 0$ e todo inteiro $n \geq s$.

12. Use o algoritmo da divisão para provar que
    (a) todo inteiro ímpar é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$;
    (b) o cubo de um inteiro é da forma $9k$, $9k + 1$ ou $9k + 8$.
13. Prove que todo inteiro da forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$, mas não vale a recíproca.
14. Mostre que um inteiro a é par se, e somente se, a^2 for par.
15. Mostre que $4 \nmid a^2 + 2$, para qualquer inteiro a.
16. Mostre que se a é um inteiro ímpar, então $a^2 - 1$ é divisível por 8.
17. Mostre que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6 e que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24.
18. Seja a um inteiro. Mostre que
    (a) $a^2 - a$ é divisível por 2;
    (b) $a^3 - a$ é divisível por 6;
    (c) $a^5 - a$ é divisível por 30.
19. Prove que se $a \in \mathbb{Z}$, então $360 \mid a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$.
20. Seja a um inteiro. Mostre que $4 \mid a$ se, e somente se, a é uma soma de dois inteiros ímpares consecutivos.
21. Mostre que se um inteiro é um quadrado e também um cubo, então ele é da forma $7k$ ou $7k + 1$.
22. Seja n um inteiro positivo. Prove que
    (a) $7 \mid 2^{3n} - 1$,
    (b) $8 \mid 3^{2n} + 7$.
23. Mostre que se a e b são inteiros ímpares, então $a^2 + b^2$ é par, mas não é divisível por 4.
24. Nos itens abaixo responda "verdadeiro" ou "falso", justificando sua resposta. Sejam a, b, c inteiros.
    (a) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid b + c$.
    (b) Se $a \mid b + c$, então $a \mid b$ e $a \mid c$.
    (c) Se $a \mid b + c$, então $a \mid b$ ou $a \mid c$.
    (d) Suponha que $a \mid b$. Então $a \mid c$ se, e somente se, $a \mid b + c$.
25. Mostre que o quadrado de um número inteiro é da forma $9k$ ou $3k + 1$, para $k \in \mathbb{Z}$.
26. Sejam a, b inteiros não-nulos. Mostre que $\text{mdc}(na, nb) = n\,\text{mdc}(a, b)$ se n for um inteiro positivo.
27. Sejam a e b dois inteiros primos entre si. Seja c um inteiro que é divisível por a e por b. Mostre que c é divisível por ab.
28. Refaça os problemas 17, 18 e 19 usando o que você demonstrou no problema 27, acima.
29. Dois inteiros consecutivos podem ter um divisor primo comum?
30. Usando o algoritmo de Euclides, encontre o máximo divisor comum de:
    (i) 7469 e 2464, (ii) 2689 e 4001, (iii) 2947 e 3997, (iv) 1109 e 4999.
31. Encontre o máximo divisor comum d de 1819 e 3587 e determine inteiros r, s tais que

$$1819r + 3587s = d.$$

32. Sejam a e b inteiros positivos. Mostre que se $\text{mdc}(a, b) = \text{mmc}(a, b)$, então $a = b$.

33. Sejam a, b, c inteiros não-nulos e seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Mostre que a divide bc se e somente se $\frac{a}{d}$ dividir c.
34. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que
    (a) se $a \mid b$ e $\text{mdc}(b, c) = 1$, então $\text{mdc}(a, c) = 1$;
    (b) $\text{mdc}(a, c) = \text{mdc}(b, c) = 1$ se e somente se $\text{mdc}(ab, c) = 1$.
35. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.
    (a) Sejam $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Se existirem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ar + bs$, então $d = \text{mdc}(a, b)$.
    (b) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se existirem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = ar + bs$, então $\text{mdc}(a, b) = 1$.
36. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Mostre que se $d \in \mathbb{Z}$ é tal que $d \mid a + b$, então $\text{mdc}(a, d) = \text{mdc}(b, d) = 1$.
37. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Provar que
    (a) $\text{mdc}(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1$ ou 3;
    (b) $\text{mdc}(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2.
38. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, 4) = \text{mdc}(b, 4) = 2$. Prove que $\text{mdc}(a + b, 4) = 4$.
39. Mostre que $2n + 5$ e $3n + 7$ são relativamente primos, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
40. Resolva as seguintes equações diofantinas:
    (a) $3x + 5y = 47$,
    (b) $47x + 29y = 999$.
41. Determine todas as soluções $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ das equações abaixo que verificam $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
    (a) $54x + 21y = 906$,
    (b) $30x + 17y = 300$.
42. Determine todos os inteiros positivos menores do que 1000 que têm restos 9 e 15 quando divididos respectivamente por 37 e 52.
43. Somando-se um certo múltiplo $6x$ de 6 com certo múltiplo $9y$ de 9, obtém-se 126. Trocando x por y e y por x, a nova soma é 114. Determine x e y.
44. Se x e y são inteiros tais que $2x + 3y$ é múltiplo de 17, prove que $9x + 5y$ é também múltiplo de 17.
45. Uma certa tinta pode ser comprada em galões de $18\,\ell$ ou em latas de $3\,\ell$. Precisa-se de $250\,\ell$ dessa tinta. De quantas maneiras se pode comprar latas e galões para que a quantidade de sobra seja mínima?
46. Um hospital deseja adquirir medicamentos A e B de modo a distribuí-los entre alguns pacientes. Cada paciente receberá 20 vidros de cada medicamento devendo ainda sobrar 84 vidros de cada medicamento. Sabendo que A é vendido em caixas de 132 vidros e B, em caixas de 242 vidros, determine:
    (a) o número mínimo de caixas de cada medicamento que o hospital deve comprar;
    (b) o número de pacientes que receberão os medicamentos.