

CÁLCULO DIFERENCIAL GEOMÉTRICO NO \mathbb{R}^n

**Élvia Mureb Sallum
Lucia Satie Ikemoto Murakami
Juaci Picanço da Silva**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

REITOR: Prof. Dr. Marco Antonio Zago

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DIRETOR: Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo

VICE-DIRETOR: Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo

COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PRESIDENTE: Prof. Dr. Fabio Prates Machado

ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA:

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

Rua do Matão, 1010

Cidade Universitária, São Paulo, SP

05508-090

Cálculo Diferencial Geométrico no \mathbb{R}^n

Élvia Mureb Sallum

Lucia Satie Ikemoto Murakami

Juaci Picanço da Silva

IME-USP

2015

Introdução

O conteúdo desta apostila corresponde às notas de aulas (preparadas a partir dos textos da bibliografia) de parte do curso de “Cálculo Avançado”, pertencente ao programa de pós-graduação do IME-USP, ministrado pela primeira autora em 1993. Este material foi usado pela primeira vez no “XVII Cursos de Verão”, em 1998, na disciplina “Cálculo Diferencial Geométrico no \mathbb{R}^n ”. O objetivo destas notas é servir como um roteiro para o estudo do Cálculo Diferencial e apresentar diversas aplicações, sobretudo nos exercícios propostos ao final do texto.

Neste texto assumiremos que o leitor esteja familiarizado com a Análise na Reta. Em particular que em \mathbb{R} são equivalentes as propriedades do supremo, do ínfimo, dos intervalos (fechados e limitados) encaixantes e que toda sequência de Cauchy converge.

As observações de professores, alunos e monitores da disciplina correspondente, em vários Cursos de Verão do IME-USP, permitiram que editássemos a primeira versão com algumas melhorias e várias correções. A eles, o nosso agradecimento.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP e CAPES.

São Paulo, dezembro de 2015.

Sumário

Introdução	5
Capítulo 1. Topologia do \mathbb{R}^n	9
Capítulo 2. Funções contínuas	15
Capítulo 3. Funções diferenciáveis	25
3.1. O Teorema da Função Inversa	43
3.2. O Teorema da Função Implícita	50
3.3. Multiplicadores de Lagrange	59
3.4. O Teorema da Imersão	61
3.5. O Teorema da Submersão	65
3.6. O Teorema do Posto	67
Exercícios	71
Referências Bibliográficas	87
Índice Remissivo	89

CAPÍTULO 1

Topologia do \mathbb{R}^n

Consideraremos, em geral, o espaço \mathbb{R}^n com a métrica induzida pelo produto interno $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, onde $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ e } d(x, y) = \|x - y\|.$$

A *bola aberta* de centro p e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\}$$

e a *bola fechada* de centro p e raio $r > 0$ é

$$\bar{B}_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) \leq r\}.$$

Deixamos ao leitor verificar que

$$\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{e} \quad \|x - y\|_\infty = \sup\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$$

também são métricas em \mathbb{R}^n mas que não se originam de produto interno pois não obedecem a regra do paralelogramo: $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Além disso, as três métricas são equivalentes, isto é, dada uma bola numa das métricas, existe uma bola de mesmo centro, de outra métrica, contida na primeira.

Temos as seguintes definições:

DEFINIÇÃO. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é *aberto* se, para todo $p \in A$, existir $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset A$. Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é *fechado* se seu complementar, F^c , for aberto.

DEFINIÇÃO. Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é

1. *ponto interior* a D se existir $r > 0$ de modo que $B_r(p) \subset D$;
2. *ponto de fronteira* de D se, para todo $r > 0$, $B_r(p) \cap D \neq \emptyset$ e $B_r(p) \cap D^c \neq \emptyset$;
3. *ponto de acumulação* de D se, para todo $r > 0$, existir $x \in D \cap B_r(p)$, com $x \neq p$;
4. *ponto de aderência* de D se, para todo $r > 0$, existir $x \in D \cap B_r(p)$.

Denotamos os conjuntos dos pontos interiores, de fronteira, de acumulação e de aderência de D , respectivamente por $\overset{\circ}{D}$, ∂D , D' e \overline{D} .

EXEMPLO 1.1. Somente usando as definições de aberto e fechado, podemos garantir que

1. o conjunto vazio e \mathbb{R}^n são abertos e fechados;
2. o intervalo $[0, 1[\subset \mathbb{R}$ não é aberto nem fechado;
3. o intervalo $[0, \infty[\subset \mathbb{R}$ é fechado;
4. o conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é fechado;
5. para todo $r > 0$, $B_r(p)$ é aberto e $\overline{B}_r(p)$ é fechado;
6. para todo subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{D}$ é aberto e ∂D é fechado;
7. o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ não é aberto nem fechado;
8. o conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subset \mathbb{R}$ é fechado;
9. se \mathbb{Q} denota o conjunto dos números racionais então $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ não é aberto nem fechado;
10. se $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é aberto então $\pi_m(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, onde π_m é a projeção $\pi_m(x, y) = y$, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ em \mathbb{R}^m ;
11. se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ são abertos então $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é aberto;
12. se $F_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $F_2 \subset \mathbb{R}^n$ são fechados, então, $F_1 \times F_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é fechado.

PROPOSIÇÃO 1.2. Temos:

- (a) Se $(A_i)_{i \in I}$ são abertos de \mathbb{R}^n então os conjuntos $\bigcup_{i \in I} A_i$ e $\bigcap_{i \in I} A_i$ são abertos de \mathbb{R}^n .
- (b) Se $(F_i)_{i \in I}$ são fechados de \mathbb{R}^n então os conjuntos $\bigcap_{i \in I} F_i$ e $\bigcup_{i \in I} F_i$ são fechados de \mathbb{R}^n .

DEMONSTRAÇÃO. (a) Usa somente a definição de aberto.

(b) Usa que $(\bigcap F_i)^c = \bigcup F_i^c$ e $(\bigcup F_i)^c = \bigcap F_i^c$. □

EXEMPLO 1.3. Observe que interseção infinita de abertos não é necessariamente um aberto, nem união infinita de fechados é necessariamente um fechado, já que $\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ não é aberto e $\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] =]-1, 1[$ não é fechado.

Algumas caracterizações de ponto de acumulação são dadas pela

PROPOSIÇÃO 1.4. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$. São equivalentes:

- (a) p é ponto de acumulação de D ;
- (b) para todo $r > 0$, $B_r(p)$ contém uma infinidade de pontos de D ;

(c) existe uma sequência x_n de elementos de D , todos distintos de p , que converge para p .

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

O seguinte resultado caracteriza os conjuntos fechados de \mathbb{R}^n .

PROPOSIÇÃO 1.5. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:*

- (a) F é fechado;
- (b) F contém todos os seus pontos de acumulação;
- (c) F contém todos os seus pontos de fronteira;
- (d) se x_n é uma sequência em F que converge para p então $p \in F$.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

APLICAÇÃO. Se D é um subconjunto de \mathbb{R}^n , então, D' e \bar{D} são fechados.

DEFINIÇÃO. Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* se qualquer cobertura de K por abertos admitir uma subcobertura finita, isto é, se, para toda família $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ de abertos de \mathbb{R}^n com $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$, existirem $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tais que K está contido em $\mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s}$.

EXEMPLO 1.6. Usando apenas a definição acima, podemos concluir que

1. o intervalo $[0, 1[\subset \mathbb{R}$ não é compacto;
2. o intervalo $[0, \infty[$ não é compacto;
3. o conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ não é compacto;
4. o conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ é compacto;
5. qualquer conjunto finito $\{p_1, p_2, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é compacto.

TEOREMA 1.7 (Heine Borel). *Dados a e b números reais, com $a < b$, o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Dada uma cobertura $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ de $[a, b]$ por abertos, seja

$$S = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ é coberto por um número finito de abertos } \mathcal{A}_\alpha\}.$$

Temos que S é não vazio, já que $a \in S$, e S é limitado superiormente por b . Assim, existe o supremo de S , $\sup S$, e $a \leq \sup S \leq b$. Mostremos que $\sup S = b$. Seja α tal que $\sup S \in \mathcal{A}_\alpha$. Consideremos $x \in \mathcal{A}_\alpha \cap S$ e $y \in \mathcal{A}_\alpha$ tais que $[x, y] \subset \mathcal{A}_\alpha$ e $\sup S < y$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que $[a, x] \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_i}$. Como $[a, y] \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \mathcal{A}_{\alpha_n} \cup \mathcal{A}_\alpha$ e $y > \sup S$, devemos ter $\sup S = b$ e, mais ainda, $b \in S$. Portanto, $[a, b]$ é compacto. □

LEMA 1.8. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $p \in \mathbb{R}^m$ e $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma cobertura de $\{p\} \times K$ por abertos de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Então existe um aberto $A(p) \subset \mathbb{R}^m$, com $p \in A(p)$, tal que $A(p) \times K$ é coberto por um número finito dos \mathcal{A}_α .*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada ponto (p, x) em $\{p\} \times K$, existem α tal que $(p, x) \in \mathcal{A}_\alpha$ e um aberto $C_x \times D_x$ tais que $p \in C_x \subset \mathbb{R}^m$, $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ e $C_x \times D_x \subset \mathcal{A}_\alpha$. Como $(D_x)_{x \in K}$ é cobertura por abertos de K , existem $x_1, \dots, x_s \in K$ tais que $\{p\} \times K \subset C_{x_1} \times D_{x_1} \cup \dots \cup C_{x_s} \times D_{x_s}$. Basta tomar $A(p) = \bigcap_{i=1}^s C_{x_i}$. \square

PROPOSIÇÃO 1.9. *Temos as seguintes propriedades:*

1. *Se $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ são compactos então o conjunto $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é compacto.*
2. *Se $K_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ são compactos, para $i = 1, \dots, l$, então $\prod_{i=1}^l K_i \subset \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_l}$ é compacto.*
3. *O conjunto $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta demonstrar a parte 1. Dada uma cobertura (\mathcal{A}_α) , por abertos, de $K_1 \times K_2$, para cada $p \in K_1$, existe um aberto $A(p) \subset \mathbb{R}^n$, $p \in A(p)$ tal que $A(p) \times K_2$ é coberto por um número finito de \mathcal{A}_α . Temos $K_1 \subset \bigcup_{p \in K_1} A(p)$; como K_1 é compacto, existem $A(p_1), \dots, A(p_s)$ tais que K_1 está contido em $A(p_1) \cup \dots \cup A(p_s)$. Dessa maneira, obtemos

$$K_1 \times K_2 \subset \bigcup_{i=1}^s (A(p_i) \times K_2) \subset \bigcup_{\text{finita}} \mathcal{A}_\alpha.$$

Portanto, $K_1 \times K_2$ é compacto. \square

LEMA 1.10. *Todo fechado contido em um compacto é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam F fechado e K compacto, com $F \subset K$. Se (\mathcal{A}_α) é uma cobertura por abertos de F , então $K \subset (\bigcup_\alpha \mathcal{A}_\alpha) \cup F^c$ e, portanto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tais que $K \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s} \cup F^c$. Assim, $F \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s}$. \square

PROPOSIÇÃO 1.11. *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e limitado então D é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos $D \subset \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, pois D é limitado. O resultado segue do lema anterior e da parte (3) da Proposição 1.9. \square

OBSERVAÇÃO 1.12. Nem sempre fechado e limitado é compacto. Por exemplo, \mathbb{R}^n com a métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y; \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

De fato, $\mathbb{R}^n = B_2(0)$ é limitado e é fechado. Além disso, observando que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p\} = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} B_1(p)$, vemos que a cobertura $(B_1(p))_{p \in \mathbb{R}^n}$ de \mathbb{R}^n não admite subcobertura finita.

PROPOSIÇÃO 1.13. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então K é fechado e limitado.

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \mathbb{R}^n$. Como K é compacto, existem n_1, \dots, n_s tais que $K \subset B_{n_1}(0) \cup \dots \cup B_{n_s}(0) \subset B_{\max\{n_1, \dots, n_s\}}(0)$. Assim, K é limitado. Mostremos que K é fechado. Dado $p \in K^c$, para cada $x \in K$, seja $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \cap B_{r_x}(p) = \emptyset$. Portanto, $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x)$. Logo, existem $x_1, \dots, x_s \in K$ tais que $K \subset B_{r_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup B_{r_{x_s}}(x_s)$ e $B_{\min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_s}\}}(p) \subset K^c$. \square

COROLÁRIO 1.14. Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e não vazio então $\sup K$ e $\inf K$ pertencem a K .

DEMONSTRAÇÃO. Deixada a cargo do leitor. \square

OBSERVAÇÃO 1.15. Para um subconjunto K não vazio de \mathbb{R}^n (com a métrica usual) são equivalentes:

- (i) K é fechado e limitado;
- (ii) K é compacto;
- (iii) Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K ;
- (iv) Toda sequência de K admite subsequência convergente em K .

Para completar a demonstração, veja [4].

DEFINIÇÃO. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $A \subset E$ é aberto de E se $A = \mathcal{A} \cap E$, para algum aberto \mathcal{A} de \mathbb{R}^n e $F \subset E$ é fechado de E se $F = \mathcal{F} \cap E$, para algum fechado \mathcal{F} de \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se não existirem abertos \mathcal{A} e \mathcal{B} de \mathbb{R}^n tais que $\mathcal{A} \cap E$ e $\mathcal{B} \cap E$ sejam disjuntos, não vazios e $E \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ou, equivalentemente, se não existirem abertos A e B de E tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset \neq B$ e $E = A \cup B$.

EXEMPLO 1.16. 1. \emptyset e $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$ são conexos;

2. $\{p_1, p_2, \dots, p_s\} \subset \mathbb{R}^n$ não é conexo, se $s > 1$.

TEOREMA 1.17. *Os conexos não vazios da reta são os intervalos.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja E um subconjunto não vazio de \mathbb{R} . Se E não é um intervalo então existem pontos $x, y \in E$ e $c \notin E$ tais que $x < c < y$. Os conjuntos abertos $\mathcal{A} =]-\infty, c[$ e $\mathcal{B} =]c, +\infty[$ mostram que E não é conexo. Portanto, todo conexo é um intervalo. Mostremos agora que todo intervalo I é conexo. Já vimos que $I = \{p\}$ é conexo. Suponha que o intervalo I não seja conexo. Então existem abertos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ tais que $\mathcal{A} \cap I$ e $\mathcal{B} \cap I$ são disjuntos, não vazios e $I \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sejam $x \in \mathcal{A} \cap I$ e $y \in \mathcal{B} \cap I$. Podemos considerar que $x < y$. Então $S = [x, y] \cap \mathcal{A}$ é não vazio e limitado superiormente por y . Seja $c = \sup S \in [x, y] \subset I$. Temos $x < c < y$, $c \notin \mathcal{A}$ e $c \notin \mathcal{B}$ (justifique), o que é uma contradição. Logo I é conexo. \square

CAPÍTULO 2

Funções contínuas

Consideraremos funções f definidas em $D \subset \mathbb{R}^n$ com valores em \mathbb{R}^k .

DEFINIÇÃO. Dado $p \in \mathbb{R}^n$, ponto de acumulação de D , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = c \in \mathbb{R}^k$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D \cap (B_\delta(p) - \{p\})$, tivermos $f(x) \in B_\varepsilon(c)$; ou equivalentemente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < \|x - p\| < \delta$ tivermos $\|f(x) - c\| < \varepsilon$.

DEFINIÇÃO. Dizemos que f é contínua em $p \in D$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in B_\delta(p) \cap D$, tivermos $f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$.

- OBSERVAÇÃO 2.1.
1. Se p é ponto isolado de D (isto é, $p \in D$ mas não é ponto de acumulação de D), então f é contínua em p ;
 2. Quando $p \in D$ é ponto de acumulação de D , então

$$f \text{ é contínua em } p \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

- EXEMPLO 2.2.
1. A projeção $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi(x) = x_i$, em que $x = (x_1, \dots, x_n)$, é contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, como

$$\|\pi(x) - \pi(p)\| = |x_i - p_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2} = \|x - p\|,$$

basta escolher $\delta = \varepsilon$.

2. Toda função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lipschitziana (isto é, existe uma constante M tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$) é contínua.
3. A função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|$ é contínua, pois vale a desigualdade $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (Exercício 1 da lista).
4. Toda função linear $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua: de fato, seja $A = (a_{ij})$ a matriz de L em relação a base canônica e sejam $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, para

$i = 1, \dots, k$.

$$L(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_k \cdot x \end{pmatrix}.$$

Portanto, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Exercício 1 da lista) que

$$\|L(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k (a_i \cdot x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k \|a_i\|^2} \|x\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \|x\|.$$

Escrevendo $\|L\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$, temos

$$\|L(x)\| \leq \|L\| \|x\|. \quad (1)$$

Assim, $\|L(x) - L(p)\| = \|L(x - p)\| \leq \|L\| \|x - p\|$ e, portanto, L é Lipschitziana. Observe que também temos o seguinte fato:

$$\|L(x)\| \leq \|L\|_1 \|x\|, \quad (2)$$

em que $\|L\|_1 = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$. De fato, segue de (1) que o conjunto $\{\|L(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ é limitado superiormente; para $x = 0$, (2) é verdadeira e se $x \neq 0$, $\left\|L\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|L\|_1$. Logo resulta que $\|L(x)\| \leq \|L\|_1 \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Dados $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in D$, temos*

1. *A função $f = (f_1, \dots, f_k)$ é contínua em p se e somente se, para todo i , f_i é contínua em p .*
2. *Se f é contínua em p então, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a função de uma variável $f(p_1, \dots, p_{i-1}, t, p_{i+1}, \dots, p_n)$ é contínua em $t = p_i$ (porém a recíproca não é verdadeira).*
3. *Se $p \in D$ é ponto de acumulação de D então f é contínua em p se, e somente se, para toda sequência x_n de elementos de D que converge para p , tivermos que $f(x_n)$ converge para $f(p)$.*
4. *Se f é contínua em p , então f é localmente limitada nesse ponto.*
5. *Se $k = 1$ e f é contínua em p com $f(p) \neq 0$, então, localmente em p , f tem o mesmo sinal de $f(p)$.*
6. *Se $D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$, com f contínua em $p \in D$ e g contínua em $f(p) \in B$ então $g \circ f$ é contínua em p .*

7. Se $f, g: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ são contínuas em $p \in D$ então $f + g$, λf e $f \cdot g$ são contínuas em p e se $k = 1$ e $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é contínua em p .

DEMONSTRAÇÃO. Faça como exercício. Para provar 7, use 6. □

EXERCÍCIO. Enuncie e demonstre propriedades análogas para limites, observando que para a correspondente a 6. é necessário colocar como hipótese, além da existência dos limites $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = c$ e $\lim_{y \rightarrow c} g(y)$, que g não seja constante em $B_r(c) \cap B$, para algum $r > 0$.

EXEMPLO 2.4. 1. Contra-exemplo para a recíproca da propriedade 2:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $f(x, 0) \equiv 0$ é contínua em $x = 0$ e $f(0, y) \equiv 0$ é contínua em $y = 0$. Porém f não é contínua em $(0, 0)$, pois $f(y^2, y) = 1$, se $y \neq 0$. Observemos que f restrita a qualquer reta passando por $(0, 0)$ é contínua nesse ponto pois se $\gamma(t) = tv$, com $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$, então

$$f(\gamma(t)) = \frac{2tv_1v_2^2}{v_1^2 + t^2v_2^4};$$

logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0 = f(0, 0).$$

2. A função $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2 \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é contínua em $(0, 0)$ (e em nenhum ponto da curva $\gamma(t) = (t, t^2)$), mas, restrita a qualquer reta que passa por $(0, 0)$, é contínua nesse ponto.
3. Toda função linear $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua (outra demonstração):

Temos que $L(x) = (L_1(x), \dots, L_k(x))$, em que cada

$$L_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

é contínua pelas propriedades, pois projeção é contínua.

4. A função $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 < 1; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é contínua. Em particular, nos pontos (x, y) com $x^2 + y^2 = 1$.

De fato, as funções $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(r) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r^2-1}}, & \text{se } 0 \leq r < 1; \\ 0, & \text{se } r \geq 1, \end{cases}$$

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

são contínuas e $f = \varphi \circ r$.

5. A curva $\gamma: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ é contínua, injetora, mas sua inversa γ^{-1} não é contínua em $(1, 0)$ pois, para a sequência $t_{2n} = \frac{1}{2n}$, $t_{2n+1} = 2\pi - \frac{1}{2n+1}$, temos que $\gamma(t_n) = (\cos t_n, \sin t_n)$ converge para $(1, 0)$, mas $\gamma^{-1}(\cos t_n, \sin t_n) = t_n$ não converge.
6. A função dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ é injetora e contínua no conjunto $\{(x, y) : y \geq 0\} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$, mas f^{-1} não é contínua em $(p, 0)$, $p > 0$.

DEFINIÇÃO. A *imagem inversa* do conjunto A pela função f , denotada por $f^{-1}(A)$, é o conjunto $\{x \in D : f(x) \in A\}$.

PROPOSIÇÃO 2.5. *Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua em D se, e somente se, para todo $A \subset \mathbb{R}^k$ aberto, o conjunto $f^{-1}(A)$ é aberto de D , isto é, se existe $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $f^{-1}(A) = \mathcal{A} \cap D$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que f seja contínua. Dado $A \subset \mathbb{R}^k$ aberto, se $A \cap f(D) = \emptyset$, então $f^{-1}(A) = \emptyset$ é aberto; caso contrário, dado $p \in f^{-1}(A)$ seja $B_\varepsilon(f(p)) \subset A$ e, pela continuidade de f em p , existe $\delta > 0$ tal que

$$f(D \cap B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(f(p)) \subset A.$$

Basta considerar $\mathcal{A} = \bigcup_{p \in f^{-1}(A)} B_\delta(p)$ (verifique). Reciprocamente, dados $p \in D$ e $\varepsilon > 0$, seja \mathcal{A} aberto do \mathbb{R}^n tal que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p))) = \mathcal{A} \cap D$. Dessa maneira, existe $\delta > 0$ de modo que $B_\delta(p) \subset \mathcal{A}$ e $f(B_\delta(p) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(p))$. \square

COROLÁRIO 2.6. *Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua em D se, e somente se, para todo $F \subset \mathbb{R}^k$ fechado, existe \mathcal{F} fechado de \mathbb{R}^n tal que $f^{-1}(F) = \mathcal{F} \cap D$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se f é contínua, pela proposição anterior, imagem inversa de qualquer aberto de \mathbb{R}^k é aberto de D . Dado $F \subset \mathbb{R}^k$ fechado, temos que $F = A^c$ com $A \subset \mathbb{R}^k$ aberto. Assim, existe \mathcal{A} aberto de \mathbb{R}^n tal que

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(A^c) = D \setminus f^{-1}(A) = D \setminus (\mathcal{A} \cap D) = D \cap \mathcal{A}^c = D \cap \mathcal{F}.$$

Reciprocamente, se imagem inversa de fechado de \mathbb{R}^k é fechado de D , dado $A \subset \mathbb{R}^k$ aberto, $A = F^c$ com $F \subset \mathbb{R}^k$ fechado, existe \mathcal{F} fechado de \mathbb{R}^n tal que

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(F^c) = D \setminus f^{-1}(F) = D \setminus (\mathcal{F} \cap D) = D \setminus \mathcal{F}^c = D \cap \mathcal{A}.$$

Pela proposição anterior, f é contínua. \square

PROPOSIÇÃO 2.7 (Teorema do Valor Intermediário). *Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo e $f: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua então $f(E)$ é conexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $f(E)$ não seja conexo. Logo, existem abertos A e B de \mathbb{R}^k tais que $A \cap f(E)$, $B \cap f(E)$ são não vazios, disjuntos e $f(E) \subset A \cup B$. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} abertos de \mathbb{R}^n tais que $f^{-1}(A) = \mathcal{A} \cap E$ e $f^{-1}(B) = \mathcal{B} \cap E$. Temos que $\mathcal{A} \cap E$ e $\mathcal{B} \cap E$ são não vazios, disjuntos e $E \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que contradiz a hipótese de que E é conexo. Portanto, $f(E)$ é conexo. \square

COROLÁRIO 2.8. *Se $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em E conexo e $f(x_1) < y < f(x_2)$ então existe $\bar{x} \in E$ tal que $f(\bar{x}) = y$.*

- EXEMPLO 2.9.**
1. Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, o segmento de reta $\overline{pq} \subset \mathbb{R}^n$ é conexo. De fato, temos que a função $\gamma(t) = p + t(q - p)$ é contínua, o intervalo $[0, 1]$ é conexo e $\overline{pq} = \gamma([0, 1])$.
 2. \mathbb{R}^n é conexo. De fato, suponha que \mathbb{R}^n não seja conexo. Então existem abertos \mathcal{A}, \mathcal{B} não vazios, disjuntos tais que $\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sejam $p \in \mathcal{A}$, $q \in \mathcal{B}$ e $\gamma(t) = p + t(q - p)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos que $A = \{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in \mathcal{A}\}$ e $B = \{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in \mathcal{B}\}$ são abertos disjuntos não vazios e $\mathbb{R} = A \cup B$, o que é uma contradição, pois \mathbb{R} é conexo.
 3. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e fechado então $E = \emptyset$ ou $E = \mathbb{R}^n$. De fato, seja $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e fechado. Vamos mostrar que $E = \mathbb{R}^n$. Temos $\mathbb{R}^n = E \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)$ união de abertos disjuntos. Como \mathbb{R}^n é conexo e $E \neq \emptyset$, resulta que $\mathbb{R}^n \setminus E = \emptyset$, ou seja, $E = \mathbb{R}^n$.
 4. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua então $\text{Im}\gamma$ é conexo.
 5. Consideremos $\gamma:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(x) = \left(x, \text{sen}\frac{1}{x}\right)$. Sejam $E_1 = \{(0, y) : -1 < y < 1\}$ e $E_2 = \text{Im}\gamma$. O conjunto $E = E_1 \cup E_2$ é conexo. De fato, suponhamos que existam \mathcal{A} e \mathcal{B} abertos disjuntos de E tais que $E = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Como E_1 é conexo, E_1 está contido em um dos abertos, por exemplo $E_1 \subset \mathcal{A}$. Como $E_2 \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e E_2 é conexo, temos $E_2 \subset \mathcal{A}$. Logo, $E \subset \mathcal{A}$.
 6. Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas e y entre $f(\gamma(a))$ e $f(\gamma(b))$. Então existe \bar{t} entre a e b tal que $y = f(\gamma(\bar{t}))$.

7. Se $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetora num intervalo I então f é estritamente monótona e f^{-1} é contínua no intervalo $J = f(I)$.
8. Dada $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, temos:
- (i) $\{x \in D: f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$ é fechado de D ;
 - (ii) $\{x \in D: f(x) \leq c\} = f^{-1}(]-\infty, c])$ é fechado de D ;
 - (iii) $\{x \in D: f(x) \neq c\} = f^{-1}(]-\infty, c[\cup]c, \infty])$ é aberto de D .
9. O conjunto $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = 1\}$ é fechado de \mathbb{R}^n .
10. O conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{R}): \det A \neq 0\}$ é aberto de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ e o conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{R}): \det A = 0\}$ é fechado de $M_n(\mathbb{R})$.
11. Se $F_i \subset \mathbb{R}$ são fechados então $\prod_{i=1}^n F_i$ é fechado de \mathbb{R}^n . De fato, considerando as projeções $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, para $i = 1, \dots, n$, temos que $\prod_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(F_i)$.
12. Se $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então o gráfico de f é fechado de \mathbb{R}^2 . De fato, a função $H: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x, y) = y - f(x)$ é contínua e, além disso, $\text{graf } f = \{(x, f(x)): x \in [a, b]\} = H^{-1}(0)$ é fechado de $[a, b] \times \mathbb{R}$. Como $[a, b] \times \mathbb{R}$ é fechado de \mathbb{R}^2 , segue que o gráfico de f é fechado de \mathbb{R}^2 .

DEFINIÇÃO. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo por caminhos* se, para quaisquer $p, q \in E$, existir $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ contínua tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

TEOREMA 2.10. *Seja $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *Se E é conexo por caminhos então E é conexo;*
2. *Se E é aberto conexo então E é conexo por caminhos.*

DEMONSTRAÇÃO. 1. Suponhamos que existam abertos \mathcal{A} e \mathcal{B} tais que $\mathcal{A} \cap E$ e $\mathcal{B} \cap E$ sejam não vazios, disjuntos e $E \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sejam $p \in \mathcal{A} \cap E$ e $q \in \mathcal{B} \cap E$. Existe uma função contínua $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Portanto, $\mathcal{A} \cap \gamma([a, b])$ e $\mathcal{B} \cap \gamma([a, b])$ são não vazios, disjuntos e $\gamma([a, b]) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, o que é uma contradição, pois $\gamma([a, b])$ é conexo.

2. Fixemos $x_0 \in E$ e seja S o conjunto de todos os pontos $x \in E$ tal que existe um caminho contínuo $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ com $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Temos que $S \neq \emptyset$, pois $x_0 \in S$. Mostremos que S e $E \setminus S$ são abertos. Como E é conexo e $S \neq \emptyset$, isto implicará que $E \setminus S = \emptyset$ e, portanto, $S = E$. Dado $x \in S$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset E$. Para todo $y \in B_\delta(x)$, $\overline{yx} \cup \gamma([a, b]) \subset E$. Assim S

é aberto. Dado $x \in E \setminus S$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset E$. Nenhum ponto de $B_\delta(x)$ pode ser ligado a x_0 por um caminho contínuo contido em E , caso contrário, x também poderia. Logo $B_\delta(x) \subset E \setminus S$. Portanto, $E \setminus S$ é aberto. \square

- OBSERVAÇÃO 2.11. 1. Contra-exemplo para a recíproca de (1): O conjunto E do Exemplo 5 acima é conexo, mas não é conexo por caminhos.
2. Quando E é aberto vale também: E é conexo se, e somente se, E é conexo por poligonais.
3. O conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo por caminhos mas não é conexo por poligonais.

PROPOSIÇÃO 2.12. *Se $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua em K compacto então $f(K)$ é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Dada uma cobertura (\mathcal{A}_α) de $f(K)$ por abertos, existem abertos A_α de \mathbb{R}^n tais que $f^{-1}(\mathcal{A}_\alpha) = A_\alpha \cap K$. Portanto, (A_α) é uma cobertura de K por abertos. Logo, $K \subset A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_s}$ e $f(K) \subset \mathcal{A}_{\alpha_1} \cup \dots \cup \mathcal{A}_{\alpha_s}$. \square

PROPOSIÇÃO 2.13 (Teorema de Weierstrass). *Se $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e K é um compacto não vazio então f assume máximo e mínimo.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $f(K)$ é fechado e limitado, logo, é limitado inferiormente e superiormente. Portanto, existem $\sup f(K)$ e $\inf f(K)$ e, como $f(K)$ é fechado, $\sup f(K)$ e $\inf f(K)$ pertencem a $f(K)$. \square

- EXEMPLO 2.14. 1. A função $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ não assume máximo.
2. A função $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ não assume mínimo.
3. Se $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é linear e injetora, então existe $c > 0$ tal que $\|L(x)\| \geq c\|x\|$. Você pode justificar usando que na esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\}$ a função $\|L(x)\|$ assume valor mínimo $\|L(x_0)\| = c$ e que $c > 0$ pois L é injetora.

PROPOSIÇÃO 2.15. *Se $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua e injetora em K compacto então a inversa $f^{-1}: f(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que, para todo conjunto fechado F de \mathbb{R}^k , $(f^{-1})^{-1}(F)$ é fechado de $f(K)$. Temos que $(f^{-1})^{-1}(F) = f(K \cap F)$ é compacto, pois $K \cap F$ é compacto. Logo, $(f^{-1})^{-1}(F)$ é fechado. \square

- OBSERVAÇÃO 2.16. 1. Uma função f real contínua e injetora num intervalo I tem inversa contínua no intervalo $J = f(I)$. Justifique.

2. As funções $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ em $[0, 2\pi[$ e $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ em $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ são contínuas e injetoras mas suas inversas não são contínuas. Justifique.

DEFINIÇÃO. Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é *uniformemente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in D$, $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

DEFINIÇÃO. Dados um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, a *distância* de p a D , denotada por $d(p, D)$, é o ínfimo do conjunto $\{d(p, x) : x \in D\}$.

- OBSERVAÇÃO 2.17. 1. Se $D \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in D$ então $d(p, D) = 0$.
 2. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e $d(p, F) = 0$ então $p \in F$.
 3. Se $D \subset \mathbb{R}^n$ então $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, D)$ é uniformemente contínua. De fato, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos, para todo $z \in D$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, daí segue que $d(x, D) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ e $d(x, D) - d(x, y) \leq d(y, z)$. Portanto, $d(x, D) - d(x, y) \leq d(y, D)$ e, assim, $-d(x, y) \leq d(y, D) - d(x, D)$. Trocando x por y temos $d(y, D) - d(x, D) \leq d(x, y)$.

LEMA 2.18. *Dados K compacto e A aberto com $K \subset A \subset \mathbb{R}^n$, existe $\varepsilon > 0$ de modo que $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x) \subset A$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x, A^c)$. Temos que f é contínua em K . Portanto, f assume mínimo em um ponto p de K e, além disso, $f(p) > 0$, pois A^c é fechado e $p \notin A^c$. Tomando $\varepsilon = \frac{f(p)}{2}$, obtemos $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x) \subset A$. \square

OBSERVAÇÃO 2.19. No lema anterior, se K não for compacto, o resultado não vale. Por exemplo: $\{(x, 0) : -1 < x < 1\} \subset B_1((0, 0))$ e $\{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\} \subset A = \{(x, y) : x, y > 0\}$.

PROPOSIÇÃO 2.20. *Se $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua e K é compacto então f é uniformemente contínua em K .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $H: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$H(x, y) = \|f(x) - f(y)\|.$$

Dado $\varepsilon > 0$ considere $S = \{(x, y) \in K \times K : H(x, y) < \varepsilon\}$ que é aberto de $K \times K$ pois H é contínua e $S = H^{-1}(] - \infty, \varepsilon[)$. Assim, existe um aberto \mathcal{A} de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $S = \mathcal{A} \cap (K \times K)$. O conjunto $\Delta = \{(x, x) : x \in K\} \subset \mathcal{A} \cap (K \times K)$ é compacto.

Pelo Lema 2.18, existe $\delta > 0$ tal que $\Delta \subset \bigcup_{x \in K} B_\delta((x, x)) \subset \mathcal{A}$. Dados $x, y \in K$ com $\|x - y\| < \delta$, temos $\|(x, x) - (y, x)\| < \delta$. Dessa maneira, obtemos $(y, x) \in B_\delta(x, x) \subset \mathcal{A}$ e, portanto, $H(y, x) = \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. \square

EXEMPLO 2.21. 1. Se $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é lipschitziana então f é uniformemente contínua.

2. A função $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua em \mathbb{R}_+ . De fato,

(a) f é lipschitziana em $[1, \infty[$, pois

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| \leq \frac{1}{2}|x - y|;$$

(b) f é uniformemente contínua em $[0, 1]$ pois é contínua num compacto.

Observe que f não é lipschitziana em $[0, 1]$, pois não existe $M > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq M|x - 0|,$$

uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{|x|} = \infty$;

(c) como f é uniformemente contínua em $[1, \infty[$ e em $[0, 1]$, temos que f é uniformemente contínua em $[0, \infty[$. De fato, para $0 < x < 1 < y$ temos

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(y)|.$$

3. A função $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $[0, a]$.

4. A função $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $[0, \infty[$ pois existem $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $x_n, y_n \in [0, \infty[$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. De fato, tomando $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{2n}$, temos $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ e

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^2 - \left(n^2 + 1 + \frac{1}{4n^2} \right) \right| = \left| -1 - \frac{1}{4n^2} \right| > 1.$$

5. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua em $]0, 1]$ pois, para

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ e } y_n = \frac{1}{2n}, \text{ temos } |x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \text{ e}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - 2n| = n \geq 1.$$

6. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é uniformemente contínua em $[1, \infty[$, pois é lipschitziana. De fato,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{|x||y|} \leq |x - y|.$$

DEFINIÇÃO. Dados $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente limitada em $p \in D$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, sejam

$$M(f, p, \delta) = \sup\{f(x) : x \in D \cap B_\delta(p)\}$$

$$m(f, p, \delta) = \inf\{f(x) : x \in D \cap B_\delta(p)\}$$

Como $0 \leq M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta)$ decresce quando δ diminui, definimos

$$o(f, p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta)\} = \inf_{\delta > 0} \{M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta)\},$$

a oscilação de f em p .

PROPOSIÇÃO 2.22. *Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente limitada em $p \in D$. Então f é contínua em p se, e somente se, $o(f, p) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que f seja contínua em p . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D \cap B_\delta(p)$, tem-se $f(p) - \frac{\varepsilon}{4} < f(x) < f(p) + \frac{\varepsilon}{4}$. Logo, $f(p) - \frac{\varepsilon}{4} < M(f, p, \delta) \leq f(p) + \frac{\varepsilon}{4}$ e $f(p) - \frac{\varepsilon}{4} \leq m(f, p, \delta) < f(p) + \frac{\varepsilon}{4}$. Isto implica que $-\varepsilon < M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta) < \varepsilon$ e, conseqüentemente, temos $0 \leq M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta) < \varepsilon$. Como $M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta)$ decresce quando δ diminui, então $0 \leq o(f, p) < \varepsilon$. Reciprocamente, se $o(f, p) = 0$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que $x \in B_\delta(p) \cap D$ implica

$$-\varepsilon < m(f, p, \delta) - M(f, p, \delta) \leq f(x) - f(p) \leq M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta) < \varepsilon.$$

□

PROPOSIÇÃO 2.23. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ um fechado e $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Então, para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto $S = \{x \in F : o(f, x) \geq \varepsilon\}$ é fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x_n \in S$ uma seqüência tal que $x_n \rightarrow p$. Queremos mostrar que $p \in S$. Temos que $p \in F$, pois F é fechado e $x_n \in F$. Dado $\delta > 0$, existem $x_{n_0} \in B_\delta(p)$ e $B_{\delta'}(x_{n_0}) \subset B_\delta(p)$. Temos $M(f, p, \delta) \geq M(f, x_{n_0}, \delta')$, $m(f, p, \delta) \leq m(f, x_{n_0}, \delta')$ e

$$M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta) \geq M(f, x_{n_0}, \delta') - m(f, x_{n_0}, \delta') \geq o(f, x_{n_0}) \geq \varepsilon.$$

Logo, $o(f, p) \geq \varepsilon$.

□

CAPÍTULO 3

Funções diferenciáveis

Como se estuda no primeiro curso de cálculo diferencial, uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *derivável* ou *diferenciável* em $p \in \mathbb{R}$ se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = a,$$

ou, equivalentemente, se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - a(x - p)}{|x - p|} = 0,$$

ou, ainda, se existir $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - L(x - p)}{|x - p|} = 0.$$

Além disso, f é contínua em p se f for derivável nesse ponto.

Ao tentar uma definição de diferenciabilidade para $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ em um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, espera-se que, quando restrita às retas passando por p , a função seja derivável. Verifica-se, porém, que essa condição não garante a continuidade da função. (Veja a definição de derivada direcional e os exemplos dados nas páginas 29 e 30.) A boa definição de diferenciabilidade será obtida generalizando a terceira caracterização de derivabilidade dada acima. Com ela, teremos garantidas a continuidade e a existência das derivadas direcionais.

DEFINIÇÃO. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$. Dizemos que f é *diferenciável* em $p \in A$ se existir $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - L(x - p)}{\|x - p\|} = 0, \text{ ou } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

ou $f(x) = f(p) + L(x - p) + r(x)$, para x suficientemente próximo de p , com

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{\|x - p\|} = 0.$$

Daqui em diante, salvo menção explícita em contrário, consideraremos $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, A aberto de \mathbb{R}^n e $p \in A$.

Quando f é derivável em p , existe um plano passando por $(p, f(p))$ dado por $z = f(p) + L(x - p)$, tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - z(x)}{\|x - p\|} = 0,$$

isto é, $z = z(x)$ é uma aproximação de ordem 1 de f , localmente em p . Para garantir a unicidade desse plano, temos a seguinte

PROPOSIÇÃO 3.1. *Se f é diferenciável em p então existe uma única aplicação linear $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ que verifica a definição de diferenciabilidade em p . Nesse caso, L será chamada de diferencial de f em p .*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que existam $L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ tais que

$$\frac{f(p+h) - f(p) - L_i(h)}{\|h\|} \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Assim, $\frac{L_1(h) - L_2(h)}{\|h\|} = (L_1 - L_2) \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$. Para $h = te_i$, $t > 0$ e e_i vetor da base canônica de \mathbb{R}^n ($1 \leq i \leq n$),

$$(L_1 - L_2) \left(\frac{te_i}{\|te_i\|} \right) = (L_1 - L_2) \left(\frac{e_i}{\|e_i\|} \right) = (L_1 - L_2)(e_i) \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0_+$. Como $(L_1 - L_2)(e_i)$ é uma constante, $(L_1 - L_2)(e_i) = 0$, para todo i . Mas $L_1 - L_2$ é linear. Portanto, $L_1 = L_2$. \square

NOTAÇÃO: $L = df(p) = Df(p) = f'(p)$. Em geral, indicaremos por $f'(p)$ a matriz de L na base canônica.

Quando f é derivável em p , fica bem definido o *plano tangente* ao gráfico de f em $(p, f(p))$, dado por $z = f(p) + df(p)(x - p)$.

EXEMPLO 3.2. 1. A função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $f(x) = L(x) + c$, $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ e $c \in \mathbb{R}^k$ constante, é diferenciável com $df(p) = L$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$. De fato,

$$\frac{f(x) - f(p) - L(x - p)}{\|x - p\|} = \frac{L(x) + c - L(p) - c - L(x) + L(p)}{\|x - p\|} = 0.$$

2. A projeção $\pi: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\pi(x, y) = x$ é linear. Portanto, é diferenciável e

$$d\pi(x_0, y_0) = \pi, \text{ para todo } (x_0, y_0).$$

3. A função $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $f(x, y) = x + y$ é linear. Portanto, é diferenciável e $df(x_0, y_0) = f$. Observe que $df(x_0, y_0): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dada por

$$df(x_0, y_0)(h, k) = f(h, k) = h + k.$$

4. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ satisfaz $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$ então $f(0) = 0$ e f é diferenciável em 0 com $df(0) = L = 0$.

Verificação:

$$0 \leq \left\| \frac{f(x) - f(0) - L(x-0)}{\|x-0\|} \right\| = \left\| \frac{f(x)}{\|x\|} \right\| = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\| \rightarrow 0,$$

quando $x \rightarrow 0$.

5. A função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ é diferenciável em $(0, 0)$?
Solução: Vamos procurar $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, da forma $L(x, y) = ax + by$, tal que

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} \rightarrow 0, \text{ quando } (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

Temos

$$\frac{\sqrt{|hk|} - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \begin{cases} -\frac{bk}{|k|} & \text{se } h = 0 \Rightarrow b = 0 \\ -\frac{ah}{|h|} & \text{se } k = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

Assim, a candidata à $df(0, 0)$ é $L = 0$. Porém

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - 0h - 0k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \stackrel{h=k}{=} \frac{|h|}{|h|\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

6. A função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é diferenciável em $(0, 0)$?
 Vejamos se existem a, b constantes reais tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{h^2 + k^2} - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Fazendo $k = 0$ e $h \rightarrow 0^+$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - ah}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 - \frac{ah}{|h|} = 1 - a.$$

Assim, deveríamos ter $a = 1$. Por outro lado, fazendo $k = 0$ e $h \rightarrow 0^-$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - ah}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 - \frac{ah}{|h|} = 1 + a,$$

e deveríamos ter $a = -1$. Logo, f não é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

7. Se $f(x, y) = g(x)$, com $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em x_0 então f é diferenciável em (x_0, y) .

Justificativa: Devemos procurar constantes a e b tais que

$$\frac{f(x_0 + h, y + k) - f(x_0, y) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0,$$

quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Como

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \begin{cases} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0) - ah}{|h|} & (k = 0) \\ \frac{-bk}{|k|} & (h = 0) \end{cases}$$

devemos ter $a = g'(x_0)$ e $b = 0$. Logo, a candidata à $df(x_0, y)(h, k)$ é $g'(x_0)h + 0k = g'(x_0)h$. A verificação fica como exercício.

PROPOSIÇÃO 3.3. *Se f é diferenciável em p então f é contínua em p .*

DEMONSTRAÇÃO. Existe $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear tal que

$$f(x) = f(p) + L(x - p) + r(x), \text{ com } \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{\|x - p\|} = 0.$$

Assim, para $x \neq p$, $f(x) - f(p) = L(x - p) + \frac{r(x)}{\|x - p\|} \|x - p\| \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow p$. \square

CONTRA-EXEMPLO PARA A RECÍPROCA. A função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é contínua em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e não é diferenciável nesse ponto.

APLICAÇÃO.

A função $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ não é diferenciável em $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, pois não é contínua em $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSIÇÃO 3.4. *Uma função $f = (f_1, \dots, f_k)$ é diferenciável em p se, e somente se, para todo i , f_i é diferenciável em p . Neste caso,*

$$df(p) = (df_1(p), df_2(p), \dots, df_k(p)).$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos que f é diferenciável em p se, e somente se, existe $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear, $L = (L_1, \dots, L_k)$, tal que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - L(x - p)}{\|x - p\|} = 0$. Isto, por sua vez, é equivalente a $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f_i(x) - f_i(p) - L_i(x - p)}{\|x - p\|} = 0$, para todo $i = 1, \dots, k$. Assim, f é diferenciável em p se, e somente se, f_i é diferenciável em p , com $df_i(p) = L_i$, para todo $i = 1, \dots, k$. \square

APLICAÇÃO. Se $F(x) = (f(x), g(x))$, com $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciáveis em p , então F é diferenciável em p .

De fato, temos que $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), g_1(x), \dots, g_m(x))$ é diferenciável em p , pois suas componentes são diferenciáveis em p . Além disso,

$$dF(p) = (df_1(p), \dots, df_k(p), dg_1(p), \dots, dg_m(p)),$$

isto é, $dF(p) = (df(p), dg(p))$. Matricialmente,

$$F'(p) = \begin{pmatrix} f'_1(p) \\ f'_2(p) \\ \vdots \\ g'_1(p) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(p) \\ \dots\dots\dots \\ g'(p) \end{pmatrix}.$$

DEFINIÇÃO. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, a derivada direcional de f em p na direção de v é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}, \text{ se esta existir.}$$

A derivada parcial de f em p em relação a x_i é

$$D_{x_i}f(p) = D_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(p), \text{ se este existir.}$$

OBSERVAÇÃO 3.5. 1. Pode existir $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$, para todo v , e f não ser diferenciável em p (e nem mesmo contínua em p). Por exemplo,

(a) A função $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2 \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é contínua em $(0, 0)$

mas existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$, para todo v .

(b) A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é contínua

em $(0, 0)$ mas, para qualquer $v = (h, k)$, existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3hk^2}{t^3(h^2 + t^2k^4)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2hk^2}{h^2 + t^2k^4} = \begin{cases} \frac{2k^2}{h}, & \text{se } h \neq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2. Se $v = 0$ então existe $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$.

3. Existe $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ se, e somente se, existe $\frac{\partial f}{\partial(-v)}(p)$. Neste caso, temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = -\frac{\partial f}{\partial(-v)}(p).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(-v)}(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p-tv) - f(p)}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+(-tv)) - f(p)}{-t} \stackrel{(s=-t)}{=} \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(p+sv) - f(p)}{s} = -\frac{\partial f}{\partial v}(p). \end{aligned}$$

4. Em geral, se $\lambda \neq 0$, existe $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ se, e somente se, existe $\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(p)$ e, nesse caso, $\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

PROPOSIÇÃO 3.6. *Se f é diferenciável em $p \in A$ então, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, existe*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = df(p)(v).$$

DEMONSTRAÇÃO. Se f é diferenciável em p , temos

$$\frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \frac{df(p)(tv) + r(tv)}{t}, \text{ em que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Assim, se $v \neq 0$ e $t \neq 0$,

$$\frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = df(p)(v) + \frac{r(tv)}{t} = df(p)(v) + \frac{r(tv)}{\|tv\|} \frac{\|tv\|}{t}.$$

Como $\frac{r(tv)}{\|tv\|} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0$ e $\frac{\|tv\|}{t}$ é limitado, resulta que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = df(p)(v).$$

E se $v = 0$? □

OBSERVAÇÃO 3.7. 1. Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in A$ então

$$f'(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \nabla f(p) \cdot v,$$

$$\text{em que } \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

2. Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável em $p \in A$ então

$$f'(p) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \vdots \\ \nabla f_k(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial v}(p) = (\nabla f_1(p) \cdot v, \dots, \nabla f_k(p) \cdot v).$$

3. Se $\gamma:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $t_0 \in]a, b[$ então

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t_0) \end{pmatrix}.$$

APLICAÇÕES.

1. A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é diferenciável em $(0, 0)$, pois não é contínua em $(0, 0)$.

2. A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ não é diferenciável em $(0, 0)$, pois não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

3. A função $f(x, y) = |x| + |y|$ não é diferenciável em $(0, 0)$, pois não existe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

4. A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é diferenciável em $(0, 0)$?

Solução: Temos que f é contínua em $(0, 0)$, pois $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0)$, já que $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ é limitada e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$. Através da continuidade, não podemos decidir sobre a diferenciabilidade. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

a candidata à $f'(0, 0)$ é $f'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou seja, $df(0, 0)(h, k) = 0$.

Verificação:

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - 0h - 0k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{h^2 + k^2} \stackrel{(h=k)}{=} \frac{1}{2} \neq 0.$$

Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$.

$$5. \text{ A função } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{não é diferenciável}$$

em $(0,0)$ pois, para $v = (h,k) \neq (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th,tk)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 hk^2}{t^3 \sqrt{h^4 + k^4}} = \frac{hk^2}{\sqrt{h^4 + k^4}},$$

que não é linear em $v = (h,k)$.

6. A função $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x \cdot y$ é diferenciável?

Solução: Procuremos a candidata à $df(x_0, y_0)$, determinando as derivadas direcionais de f . Como

$$\begin{aligned} \frac{f((x_0, y_0) + t(h, k)) - f(x_0, y_0)}{t} &= \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ &= \frac{th \cdot y_0 + tx_0 \cdot k + t^2 h \cdot k}{t} = h \cdot y_0 + x_0 \cdot k + th \cdot k \rightarrow h \cdot y_0 + x_0 \cdot k, \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow 0$, segue que existe $\frac{\partial f}{\partial (h,k)}(x_0, y_0) = x_0 \cdot k + h \cdot y_0$. Portanto, a candidata à $df(x_0, y_0): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$df(x_0, y_0)(h, k) = x_0 \cdot k + h \cdot y_0.$$

Verificação: Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - x_0 \cdot k - h \cdot y_0}{\|(h, k)\|} \right| = \\ &= \frac{|h \cdot k|}{\sqrt{\|h\|^2 + \|k\|^2}} \leq \frac{\|h\| \|k\|}{\sqrt{\|h\|^2 + \|k\|^2}} \rightarrow 0, \text{ quando } (h, k) \rightarrow (0, 0), \end{aligned}$$

pois $\frac{\|h\|}{\sqrt{\|h\|^2 + \|k\|^2}} \leq 1$ e $\|k\| \rightarrow 0$. Portanto, f é diferenciável.

$$7. \text{ A função } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{é diferenciável em}$$

$(0,0)$, pois $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} \rightarrow 0$, quando $(h,k) \rightarrow (0,0)$. Neste caso,

$$df(0,0)(h,k) = 0h + 0k \text{ e } f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivadas parciais em p extremo local de f , então $\nabla f(p) = 0$. De fato, para t real suficientemente pequeno, considere $\varphi(t) = f(p + te_i)$. Temos que $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$, para todo i , pois φ assume extremo local em $t = 0$.
9. Sejam $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciáveis no aberto A . Então a função $F(x, y) = (f(x), g(y))$ é diferenciável em $A \times A \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Justificativa:

$$\text{Seja a candidata à } F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'(x_0) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & g'(y_0) \end{pmatrix}.$$

Verificação: Temos

$$\begin{aligned} & \frac{(f(x_0 + h), g(y_0 + k)) - (f(x_0), g(y_0)) - (f'(x_0)h, g'(y_0)k)}{\|(h, k)\|} = \\ & = \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|(h, k)\|}, \frac{g(y_0 + k) - g(y_0) - g'(y_0)k}{\|(h, k)\|} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|(h, k)\|} = \\ & = \begin{cases} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|h\|} \frac{\|h\|}{\|(h, k)\|}, & \text{se } h \neq 0; \\ 0, & \text{se } h = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

que tende a 0 em \mathbb{R}^k quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Analogamente,

$$\frac{g(y_0 + k) - g(y_0) - g'(y_0)k}{\|(h, k)\|} \rightarrow 0, \text{ quando } (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

PROPOSIÇÃO 3.8 (Regra da Cadeia). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ abertos, $f: A \rightarrow B$ diferenciável em $p \in A$ e $g: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em $f(p) \in B$. Então $g \circ f$ é diferenciável em $p \in A$ e $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\Delta f = f(p + h) - f(p)$. Como g é diferenciável em $f(p)$ e f é diferenciável em p , temos, para h suficientemente próximo de 0,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(p + h) - (g \circ f)(p) &= dg(f(p))(\Delta f) + r(\Delta f) \left(\text{com } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r(k)}{\|k\|} = 0 \right) = \\ &= dg(f(p))(df(p)(h) + s(h)) + r(\Delta f) \left(\text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{\|h\|} = 0 \right) = \\ &= dg(f(p))df(p)h + dg(f(p))(s(h)) + r(\Delta f). \end{aligned}$$

Assim, basta mostrar que

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{dg(f(p))(s(h)) + r(\Delta f)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(dg(f(p)) \left(\frac{s(h)}{\|h\|} \right) + \frac{r(\Delta f)}{\|h\|} \right).$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{\|h\|} = 0$, só falta provar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(\Delta f)}{\|h\|} = 0$. De $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{r(k)}{\|k\|} = 0$ e da continuidade de f em p , segue que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $\|r(k)\| < \varepsilon\|k\|$, se $0 < \|k\| < \delta_1$ e $\|\Delta f\| < \delta_1$, se $\|h\| < \delta_2$. Logo,

$$\|r(\Delta f)\| \leq \varepsilon \|df(p)(h) + r(h)\| \leq \varepsilon (\|df(p)\| \cdot \|h\| + \|r(h)\|)$$

e

$$\frac{\|r(\Delta f)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \left(\|df(p)\| + \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \right), \text{ se } 0 < \|h\| < \delta_2.$$

Diminuindo δ_2 , se necessário, podemos garantir que $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} < 1$, se $0 < \|h\| < \delta_2$

e, portanto, $\frac{\|r(\Delta f)\|}{\|h\|} < \varepsilon (\|df(p)\| + 1)$. \square

APLICAÇÕES.

1. Temos que $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, desde que as funções $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sejam diferenciáveis.

De fato, temos

$$\begin{array}{ccc} t & \xrightarrow{\gamma} & (x(t), y(t)) \\ & & (x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) \end{array}$$

Pela Regra da Cadeia, $f \circ \gamma$ é derivável e $d(f \circ \gamma)(t) = df(\gamma(t))d\gamma(t)$, ou seja,

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\gamma(t)} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

2. Temos que

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) x'_i(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

se as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, forem diferenciáveis.

3. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ são diferenciáveis então

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x(u, v), y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \text{ e}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x(u, v), y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

De fato,

$$(u, v) \xrightarrow{\sigma} (x(u, v), y(u, v)) \\ (x, y) \xrightarrow{f} f(x, y)$$

Pela Regra da Cadeia, $f \circ \sigma$ é diferenciável e

$$\begin{aligned} (f \circ \sigma)'(u, v) &= f'(\sigma(u, v))\sigma'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\sigma(u, v)} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u, v)} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u, v)} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial u} & \frac{\partial f(x(u, v), y(u, v))}{\partial v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são diferenciáveis então, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$D_i(f \circ g)(p) = \sum_{j=1}^m D_j f(g(p)) D_i g_j(p).$$

5. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em p e $\gamma:]-\delta, \delta[\rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ é derivável em 0, com $\gamma'(0) = v$ e $\gamma(0) = p$, então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

De fato, $\left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \stackrel{\text{RC}}{=} df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(p)(v) \stackrel{(\text{Prop 3.6})}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

Observe que, quando f não é diferenciável em p ,

- (a) podem existir $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$, $\left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}$ e serem diferentes; por exemplo, para

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{se } y = x^2; \\ (0, 0) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

temos $\frac{\partial f}{\partial e_1}(0, 0) = (0, 0)$ e, tomando a curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)$

$$\left|_{t=0} = (1, 0);$$

- (b) pode existir $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ e não existir $\left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}$. Por exemplo, para

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

se $p = 0$, $v = e_2$ e $\gamma(t) = (t^2, t)$.

6. Seja $u = u(x, t)$ tal que $u = f(x, y, z)$, $y = h(x, t)$, $z = g(x, y, t)$ são diferenciáveis. Temos que $u(x, t)$ é diferenciável. De fato, como

$$u(x, t) = f(x, h(x, t), g(x, h(x, t), t)),$$

temos que $u(x, t) = f \circ G \circ F(x, t)$:

$$\begin{array}{ccc} (x, t) & \xrightarrow{F} & (x, h(x, t), t) \\ & & \downarrow G \\ & & (x, y, t) \xrightarrow{G} (x, y, g(x, y, t)) \\ & & \downarrow f \\ & & (x, y, z) \xrightarrow{f} f(x, y, z) \end{array}$$

Pela Regra da Cadeia, u é diferenciável, pois F, G e f são diferenciáveis e

$$u'(x, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \right), \text{ em que}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \text{ e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} \right).$$

7. A função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \cdot x = \|x\|^2$ é diferenciável e $df(x_0)(h) = 2x_0 \cdot h$. De fato, como $f = F \circ G$,

$$\begin{array}{ccc} x \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{G} & (x, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & & \downarrow F \\ & & (x, y) \xrightarrow{F} x \cdot y \end{array}$$

G é linear, portanto, diferenciável e F é diferenciável então, pela Regra da Cadeia, $f = F \circ G$ é diferenciável e $df(x_0) = dF(G(x_0))dG(x_0)$. Assim,

$$df(x_0)(h) = dF(x_0, x_0)(h, k) = x_0 \cdot h + x_0 \cdot h = 2x_0 \cdot h.$$

PROPOSIÇÃO 3.9. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciáveis.*

Então:

1. $f + g$ é diferenciável e $d(f + g)(x) = df(x) + dg(x)$;
2. λf é diferenciável e $d(\lambda f)(x) = \lambda df(x)$;
3. $f \cdot g$ é diferenciável e $d(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot dg(x) + g(x) \cdot df(x)$;
4. Se $k = 1$ e $f(x) \neq 0$ então $\frac{1}{f}$ é diferenciável em x e

$$d\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f(x)^2} df(x).$$

DEMONSTRAÇÃO.

1.
$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{F} & (f(x), g(x)) \\ & & \downarrow G \\ & & (u, v) \xrightarrow{G} u + v \end{array}$$

Como F e G são diferenciáveis, então $G \circ F(x) = f(x) + g(x)$ é diferenciável e

$$d(G \circ F)(x) = dG(F(x)) \circ dF(x) = G \circ (df(x), dg(x)) = df(x) + dg(x).$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ & & u \xrightarrow{G} \lambda u \end{array}$$

Como G e f são diferenciáveis, então $G \circ f(x) = \lambda f(x)$ é diferenciável em x e $d(G \circ f)(x) = G \circ df(x) = \lambda df(x)$.

$$3. \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{F} & (f(x), g(x)) \\ & & (u, v) \xrightarrow{G} u \cdot v \end{array}$$

Como G e F são diferenciáveis, então $(G \circ F)(x) = f(x) \cdot g(x)$ é diferenciável em x e

$$d(G \circ F)(x) = dG(F(x)) \circ dF(x) = DG(F(x)) \circ (df(x), dg(x)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(G \circ F)(x)(h) &= dG(f(x), g(x))(df(x)(h), dg(x)(h)) = \\ &= f(x) \cdot dg(x)(h) + g(x) \cdot df(x)(h). \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \in \mathbb{R}^* \\ & & t \in \mathbb{R}^* \xrightarrow{h} \frac{1}{t} \end{array}$$

Como h e f são diferenciáveis, então $(h \circ f)(x) = \frac{1}{f(x)}$ é diferenciável e

$$d(h \circ f)(x) = dh(f(x)) \circ df(x) = -\frac{1}{f(x)^2} df(x).$$

□

DEFINIÇÃO. Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 em $p \in D$ se existe uma vizinhança aberta $V(p)$ de p (conjunto aberto que contém p) contida em D , em que existem todas as $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ e são contínuas em p .

OBSERVAÇÃO 3.10. Considerando o espaço $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ com qualquer uma das normas $\|A\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ou $\|A\|_1 = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\}$, temos que $f \in C^1$ em p se, e somente se, a função $x \in V(p) \mapsto \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é contínua em p . Justifique.

Usaremos o

TVM DA RETA. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e é derivável em $]a, b[$ então existe $\bar{x} \in]a, b[$ tal que $f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

para demonstrar a

PROPOSIÇÃO 3.11. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 em $p \in A$ então f é diferenciável em p .

DEMONSTRAÇÃO. Basta provar para $m = 1$. Indicaremos a demonstração para $n = 2$. Basta observar que existem \bar{x} entre x_0 e $x_0 + h$ e \bar{y} entre y_0 e $y_0 + k$ tais que

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ & \stackrel{\text{(TVM)}}{=} \frac{f_x(\bar{x}, y_0 + k)h + f_y(x_0, \bar{y})k - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \left(f_x(\bar{x}, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0) \right) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \left(f_y(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0) \right) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 3.12. 1. Contra-exemplo para a recíproca da Proposição 3.11:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Temos que $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = 0$ e $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$. Observemos que f' não é contínua no ponto $x = 0$, já que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$, pois $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, mas não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ (basta tomar as sequências $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ e $y_k = \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$). Assim, f é diferenciável em 0, mas não é de classe C^1 em 0.

$$2. \text{ Consideremos } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

Vejamos que f é diferenciável em $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Candidata à $df(0,0)(h,k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0h + 0k$.

Verificação:

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow 0,$$

quando $(h,k) \rightarrow (0,0)$. Porém, f não é de classe C^1 em $(0,0)$; de fato, te-

mos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, se $(x,y) \neq$

$(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$ pois

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$$

e, para $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2k\pi}, 0\right) = -1$.

3. A função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } x=y=0 \end{cases}$ não é diferenciável

em $(0,0)$. E nos outros pontos? Nos outros pontos, $f \in C^1$, pois

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^4)2y^2 - 4x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^4)4xy - 8xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

são contínuas em $(x,y) \neq (0,0)$.

DEFINIÇÃO. Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^2 em $p \in D$ se existe uma vizinhança aberta de p , $V(p) \subset D$, na qual existem $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ e são contínuas em p , para todo i, j, k .

EXEMPLO 3.13. 1. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$ é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e o maior aberto em que f é de classe C^2 é $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Verifique.

$$2. f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } x=0=y. \end{cases}$$

Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ e conclua, pelo teorema abaixo, que f não é de classe C^2 em $(0,0)$.

TEOREMA 3.14 (Teorema de Schwarz). Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em A aberto. Se, para algum (i,j) existem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e são contínuas em A então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ em A .

DEMONSTRAÇÃO. Indicaremos para $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{k} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} - \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}{k} = \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk} \right) = \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{hk} \quad (\text{em que } \varphi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)) = \\
&\stackrel{\text{TVM}}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(\bar{t})}{h} \quad (\bar{t} \text{ entre } y_0 \text{ e } y_0 + k) = \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, \bar{t}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{t})}{h} = \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (\bar{x} \text{ entre } x_0 \text{ e } x_0 + h).
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em (x_0, y_0) , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \subset A$, tem-se $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, para (h, k) suficientemente pequeno e (\bar{x}, \bar{t}) obtido acima, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Do que vimos, existe $\lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(\bar{x}, \bar{t})$ e, portanto, $\left| \lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(\bar{x}, \bar{t}) - f_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon$, para todo k suficientemente pequeno. Isso significa que $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(\bar{x}, \bar{t}) = f_{xy}(x_0, y_0)$. \square

PROPOSIÇÃO 3.15 (Teorema do Valor Médio). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável e $\overline{pq} \subset A$. Então existem $c_i \in \overline{pq}$ tais que*

$$f(q) - f(p) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (q - p).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\gamma(t) = p + t(q - p) = tq + (1 - t)p.$$

Temos $f(\gamma(t)) = (f_1(\gamma(t)), \dots, f_m(\gamma(t)))$. Consideremos $\varphi_i = f_i \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Pelo Teorema do Valor Médio da reta, existe um ponto $t_i \in]0, 1[$ de modo que $\varphi_i(1) - \varphi_i(0) = \varphi_i'(t_i)(1 - 0)$, isto é,

$$f_i(q) - f_i(p) = \nabla f_i(\gamma(t_i))\gamma'(t_i) = \nabla f_i(\gamma(t_i))(q - p).$$

Seja $c_i = \gamma(t_i)$; assim,

$$f(q) - f(p) = \left(\nabla f_1(c_1)(q - p), \dots, \nabla f_m(c_m)(q - p) \right) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (q - p).$$

□

OBSERVAÇÃO 3.16. Não se pode garantir que $c_1 = c_2 = \dots = c_m$, como mostra o exemplo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, para $q = 0$ e $p = 2\pi$.

COROLÁRIO 3.17. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo, se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável e existe uma constante M tal que $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$ em A , para todo i, j , então $\|f(x) - f(y)\| \leq M\sqrt{mn}\|x - y\|$, para todo $x, y \in A$.

DEMONSTRAÇÃO. Como A é convexo, dados $x, y \in A$, temos que $\overline{xy} \subset A$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\stackrel{\text{(TVM)}}{=} \left\| \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (x - y) \right\| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_i) \right)^2} \|x - y\| \leq \sqrt{M^2 mn} \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

COROLÁRIO 3.18. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 então f é localmente lipschitziana.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $p \in A$, existe $\overline{B}_r(p) \subset A$. Como $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são contínuas em $\overline{B}_r(p)$, existe $M > 0$ tal que $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M$, para todo $x \in \overline{B}_r(p)$ e para todo i, j . Logo, pelo corolário anterior, como $\overline{B}_r(p)$ é convexo (verifique), temos

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\sqrt{mn}\|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in \overline{B}_r(p).$$

□

COROLÁRIO 3.19. *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , se $K \subset A$ é compacto convexo então f é lipschitziana em K .*

DEMONSTRAÇÃO. exercício. □

COROLÁRIO 3.20. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto conexo e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável com $df(x) = L$ constante então $f(x) = L(x) + c$, em que $c \in \mathbb{R}^m$ é uma constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Se A é aberto conexo então A é conexo por poligonais. Fixamos $x_0 \in A$. Para todo $x \in A$, considere uma poligonal $x_0, \widehat{x_1, \dots, x_k} = x$ contida em A . Como $df(x) = L$, temos, pelo TVM,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_0) &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (x_1 - x_0) = L(x_1 - x_0) \\ f(x_2) - f(x_1) &= \dots = L(x_2 - x_1) \\ \vdots & \\ f(x_k) - f(x_{k-1}) &= \dots = L(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Somando essas expressões, obtemos $f(x) - f(x_0) = L(x) - L(x_0)$, ou seja, $f(x) = L(x) + c$, $c = f(x_0) - L(x_0)$. □

- OBSERVAÇÃO 3.21.**
1. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto conexo, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável e $df(x) = 0$, para todo x , então f é constante.
 2. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, se $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções diferenciáveis e $df(x) = dg(x)$, para todo x , então $f - g$ é constante.

COROLÁRIO 3.22. *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $K \subset A$ compacto, se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 então f é lipschitziana em K .*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $x \in K$, considere $\bar{B}_\delta(x) \subset A$, e observe que $f|_{\bar{B}_\delta(x)}$ é lipschitziana. Temos $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\delta(x)$, portanto, existem $\delta_1, \dots, \delta_s$, tais que K está contido em $B_{\delta_1} \cup \dots \cup B_{\delta_s}$. Seja $M = \max\{M_1, \dots, M_s\} > 0$, onde $M_i > 0$ é uma constante de Lipschitz de $f|_{\bar{B}_{\delta_i}}$. Assim, para todo $(x, y) \in K \times K$, temos

- (i) se $x, y \in \bar{B}_{\delta_i}$ então $\|f(x) - f(y)\| \leq M_i \|x - y\| \leq M \|x - y\|$.
- (ii) se $(x, y) \in F = (K \times K) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^s B_{\delta_i} \times B_{\delta_i} \right)$:

a função $(x, y) \in F \mapsto \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}$ é contínua, portanto, assume máximo no compacto F . Logo, existe $N > 0$ tal que, para todo elemento $(x, y) \in F$, $\|f(x) - f(y)\| \leq N\|x - y\|$. Escolhendo $\lambda = \max\{M, N\}$, resulta que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in K.$$

□

OBSERVAÇÃO 3.23. Se $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua então

$$\left\| \int_a^b \alpha(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\alpha(t)\| dt.$$

De fato, temos: $\int_a^b \alpha(t) dt = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_P \alpha(c_i) \Delta t_i$ e $\int_a^b \|\alpha(t)\| dt = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_P \|\alpha(c_i)\| \Delta t_i$, em que $P: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ é uma partição do intervalo $[a, b]$, $|P|$ é o máximo do conjunto $\{\Delta t_i: 1 \leq i \leq n\}$ e $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Como $\left\| \sum_P \alpha(c_i) \Delta t_i \right\| \leq \sum_P \|\alpha(c_i)\| \Delta t_i$, passando ao limite, temos

$$\left\| \int_a^b \alpha(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\alpha(t)\| dt.$$

PROPOSIÇÃO 3.24. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 que verifica $\|f'(x)\|_1 \leq M$, para todo $x \in A$. Então $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, para todo $x, y \in A$. ($\|L\|_1 = \sup\{\|L(x)\|: \|x\| \leq 1\}$)

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\gamma(t) = x + t(y - x)$. Assim,

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \int_0^1 df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \left\| \int_0^1 df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_0^1 \|df(\gamma(t)) \gamma'(t)\| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \|df(\gamma(t))\|_1 \|\gamma'(t)\| dt \leq \int_0^1 M \|\gamma'(t)\| dt = M\|y - x\|. \end{aligned}$$

□

3.1. O Teorema da Função Inversa

Na reta, temos:

TEOREMA 3.25. Dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, se a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável com $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, então f é bijetora de I no intervalo aberto $f(I) = J$, $f^{-1}: J \rightarrow I$ é derivável e f é aberta em I , isto é, f leva aberto contido em I em aberto de \mathbb{R} .

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema do Valor Intermediário, $f(I) = J$ é intervalo. E, pelo Teorema do Valor Intermediário para derivadas (ver [5]), $f'(x)$ não muda de sinal. Assumindo que $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$, f é estritamente crescente em I (e, portanto, injetora), pois dado $x < x'$ em I , existe \bar{x} entre x e x' tal que $f(x) - f(x') = f'(\bar{x})(x - x') < 0$. Para ver que f é aberta em I , basta mostrar que se $I_1 \subset I$ é intervalo aberto então o intervalo $f(I_1)$ é aberto. Assim, para todo $c \in f(I_1)$, $c = f(x_1)$ com $x_1 \in I_1$, sejam x_2 e x_3 em I_1 tais que $x_2 < x_1 < x_3$. Temos $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ e daí segue que $c \in \widehat{f(I_1)}$. Assim, $f: I \rightarrow f(I)$ é bijetora e aberta; logo, $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ é contínua, pois, para todo A aberto de \mathbb{R} , $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A \cap I)$ é aberto, já que $A \cap I$ é aberto (ver também Exemplo 7 após a Proposição 2.7). Vejamos que f^{-1} é derivável em $y_0 \in J$. Pela continuidade de f^{-1} em y_0 , temos

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

□

Para aplicações lineares, temos:

TEOREMA 3.26. *Uma aplicação linear $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é bijetora se, e somente se, $\det L$ é diferente de zero. Neste caso, L é aberta.*

Porém, se $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ é dada por $\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y \\ v(x, y) = e^x \sin y \end{cases}$

temos $Jf = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$, para todo (x, y) , mas f não é injetora em \mathbb{R}^2 : $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$.

TEOREMA 3.27 (Teorema da Função Inversa). *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se a função $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k , $k \geq 1$, com $Jf(x_0) = \det f'(x_0) \neq 0$, então f é um difeomorfismo C^k local em x_0 , isto é, existem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ com $x_0 \in U$ e $f(x_0) \in V$ tais que $f: U \rightarrow V$ é bijetora com inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ de classe C^k .*

Nesse caso,

1. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é aberta (isto é, para todo aberto $\mathcal{A} \subset U$, $f(\mathcal{A})$ é aberto). De fato, se $B \subset U$ é aberto então $f(B) = (f^{-1})^{-1}(B)$ é aberto de V , logo, de \mathbb{R}^n .
2. $(f \circ f^{-1})(y) = y$ implica $Df(f^{-1}(y))Df^{-1}(y) = I$, ou seja,

$$Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1},$$

para todo $y \in V$.

Antes da demonstração do Teorema, vejamos algumas aplicações:

EXEMPLO 3.28. 1. Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto A e $Jf(x) \neq 0$, para todo $x \in A$, então f é aberta.

De fato, dado $\mathcal{A} \subset A$ aberto e $p \in \mathcal{A}$, existem abertos $U_p \subset \mathcal{A}$ e V_p tais que $f(U_p) = V_p$ (por quê?), logo,

$$f(\mathcal{A}) = f\left(\bigcup_{p \in \mathcal{A}} U_p\right) = \bigcup_{p \in \mathcal{A}} f(U_p) = \bigcup_{p \in \mathcal{A}} V_p \text{ é aberto.}$$

2. Diremos que $\varphi: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *difeomorfismo* (de classe C^k , $k \geq 1$) no aberto A se φ é diferenciável (de classe C^k , $k \geq 1$), é injetora, $\varphi(A)$ é aberto e sua inversa $\varphi^{-1}: \varphi(A) \rightarrow A$ é diferenciável (de classe C^k , $k \geq 1$).

Seja $\varphi: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto A . Tem-se que φ é um difeomorfismo de classe C^k se, e somente se, φ é injetora com $\det \varphi'(x) \neq 0$, para todo $x \in A$.

3. A função $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é derivável em \mathbb{R} , $f'(0) = 1$,

mas f não é localmente injetora em $x = 0$. Como você explica?

4. A função derivável $f(x) = x^3$ tem inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ que não é derivável em 0. Como você explica?

5. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função bijetora de classe C^1 com $\det f'(p_0) = 0$, então, sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não é diferenciável em $f(p_0)$.

6. A função $f(x, y) = (x^3, y^3)$ é injetora mas $\det f'(0, 0) = 0$.

7. Estudar a injetividade local de $f(x, y) = (x^2 + 2xy + y^2, x + y)$ em cada ponto de \mathbb{R}^2 , examinando seu comportamento geométrico.

8. Seja $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2$. Mostre que, para todo $Y \in M_n(\mathbb{R})$ suficientemente próximo da matriz identidade I , existe um único $X (= \sqrt{Y})$ próximo de I tal que $X^2 = Y$ e $X = X(Y)$ é de classe C^∞ .

9. Seja $p_0(x) = a_0x^3 - b_0x^2 + c_0x - d_0$ um polinômio com coeficientes reais e três raízes reais distintas. Então qualquer polinômio da forma $p(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ que tem coeficientes reais com (a, b, c, d) suficientemente próximo de (a_0, b_0, c_0, d_0) também tem 3 raízes reais distintas que variam em classe C^∞ com os coeficientes do polinômio.

Justificativa: Sejam x_0, y_0, z_0 as raízes de $p_0(x)$ e

$$F(x, y, z) = (x + y + z, xy + xz + yz, xyz) \in C^\infty.$$

Temos $F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{b_0}{a_0}, \frac{c_0}{a_0}, \frac{d_0}{a_0} \right)$ e

$$JF(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_0 + z_0 & x_0 + z_0 & x_0 + y_0 \\ y_0 z_0 & x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{vmatrix}.$$

Para mostrar que $JF(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, consideremos $x + y = u$, $xy = v$.

$$(x, y, z) \xrightarrow{H} (x + y, xy, z) \\ (u, v, z) \xrightarrow{G} (u + z, v + uz, vz)$$

Temos $F = G \circ H$, $dF(x_0, y_0, z_0) = dG(x_0 + y_0, x_0 y_0, z_0) dH(x_0, y_0, z_0)$ e

$$F'(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ z_0 & 1 & u_0 \\ 0 & z_0 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ y_0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sendo $u_0 = x_0 + y_0$ e $v_0 = x_0 y_0$. Logo,

$$JF(p_0) = \det F'(p_0) = (v_0 + z_0^2 - z_0 u_0)(x_0 - y_0) = \\ = (z_0 - x_0)(z_0 - y_0)(x_0 - y_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos U e V de \mathbb{R}^3 , com $(x_0, y_0, z_0) \in U$ e $\left(\frac{b_0}{a_0}, \frac{c_0}{a_0}, \frac{d_0}{a_0} \right) \in V$ tais que $F: U \rightarrow V$ é difeomorfismo de classe C^∞ . Logo, para todo ponto $(b', c', d') \in V$, o polinômio $q(x) = x^3 - b'x^2 + c'x - d'$ admite 3 raízes reais dadas por $F^{-1}(b', c', d')$. Diminuindo U , obtemos as raízes distintas entre si. Como a aplicação

$$(a, b, c, d) \mapsto \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a} \right), \quad (a \neq 0)$$

é de classe C^∞ em (a_0, b_0, c_0, d_0) , existe W vizinhança de (a_0, b_0, c_0, d_0) tal que, para todo $(a, b, c, d) \in W$, o polinômio $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$ tem 3 raízes distintas em U , que variam em classe C^∞ com os coeficientes (a, b, c, d) .

10. Enunciar e demonstrar o análogo ao Exemplo 9. para polinômios da forma $p(x) = x^4 - a_0 x^3 + b_0 x^2 - c_0 x + d_0$.

TEOREMA 3.29 (do Ponto Fixo de Banach). *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e $f: F \rightarrow F$ é uma contração então existe um único $p \in F$ tal que $f(p) = p$.*

(f é contração se existe $0 \leq \lambda < 1$ de modo que $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$, para todo x, y .)

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos $x_0 \in F$ e consideremos a sequência

$$x_{n+1} = f(x_n) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n+1}(x_0) = f^{n+1}(x_0).$$

Provaremos que a sequência (x_n) é de Cauchy em $F \subset \mathbb{R}^n$. Assim, existirá $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_n \rightarrow p$ (pois em \mathbb{R} toda sequência de Cauchy converge) e, como F é fechado, $p \in F$. De $f(x_n) = x_{n+1}$, resultará $f(p) = p$ (pela continuidade de f , aplicando limite em ambos os lados).

Unicidade: Supondo $f(p_1) = p_1$, $f(p_2) = p_2$ e $p_1 \neq p_2$, temos

$$\|f(p_1) - f(p_2)\| = \|p_1 - p_2\| \leq \lambda \|p_1 - p_2\| < \|p_1 - p_2\|,$$

o que é absurdo. Portanto, $p_1 = p_2$.

Vejamos que (x_n) é de Cauchy. De

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\| \leq \\ &\leq \lambda^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \dots \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &= \|x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \dots + x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq (\lambda^{n+p-1} + \lambda^{n+p-2} + \dots + \lambda^n) \|x_1 - x_0\| = \lambda^n (1 + \lambda + \dots + \lambda^{p-1}) \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, temos que a sequência $1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n$ é crescente e convergente, portanto, $1 + \lambda + \dots + \lambda^n \leq \frac{1}{1-\lambda}$, para todo n . Dessa maneira,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n \|x_1 - x_0\|}{1-\lambda} = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $0 \leq \frac{\lambda^n \|x_1 - x_0\|}{1-\lambda} < \varepsilon$. Logo, para todo $n \geq n_0$ e $m \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$. \square

EXERCÍCIO. Verifique que o Teorema do Ponto Fixo não vale se temos apenas a condição $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$, para quaisquer x, y com $x \neq y$, usando $f(x) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{2}$.

TEOREMA 3.30 (Teorema da Perturbação da Identidade). Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contração então $g = I + f$ é um homeomorfismo do aberto A sobre o aberto $g(A)$ (isto é, g é contínua e injetora em A com inversa g^{-1} contínua em $g(A)$ aberto de \mathbb{R}^n).

DEMONSTRAÇÃO. Observe que

$$\|g(x) - g(y)\| = \|x - y + f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| - \|f(x) - f(y)\|.$$

Além disso, existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$, para todo $x, y \in A$, pois f é contração. Assim,

$$\|g(x) - g(y)\| \geq \|x - y\| - \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| - \lambda \|x - y\| = (1 - \lambda) \|x - y\|.$$

Dessa maneira, temos

1. g é injetora: $g(x) = g(y)$ implica $\|g(x) - g(y)\| = 0 \geq (1 - \lambda) \|x - y\|$. Como $1 - \lambda > 0$, temos que $x = y$.
2. g^{-1} é contínua: se $u, v \in g(A)$, $u = g(x)$, $v = g(y)$ e

$$\|g^{-1}(u) - g^{-1}(v)\| = \|x - y\| \leq \frac{1}{1 - \lambda} \|u - v\|.$$

3. $g(A)$ é aberto: dado $y_0 \in g(A)$, queremos encontrar $r > 0$ de maneira que $B_r(y_0) \subset g(A)$, ou seja, tal que, dado $y \in B_r(y_0)$, existe $x \in A$ que satisfaz $y = g(x) = x + f(x)$, isto é, $\varphi_y(x) = y - f(x)$ tem ponto fixo. Seja $x_0 \in A$ tal que $g(x_0) = y_0$. Escolhendo $\overline{B}_\delta(x_0) \subset A$, consideremos $\varphi_y: \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Temos que φ_y é contração, pois

$$\|\varphi_y(x) - \varphi_y(x')\| = \|y - f(x) - y + f(x')\| \leq \lambda \|x - x'\|.$$

Vejam quando $\varphi_y(\overline{B}_\delta(x_0)) \subset \overline{B}_\delta(x_0)$. Para $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x) - x_0\| &= \|y - f(x) - x_0\| = \|y - f(x_0) - x_0 + f(x_0) - f(x)\| \leq \\ &\leq \|y - g(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\| \leq r + \lambda \|x - x_0\| \leq r + \lambda \delta. \end{aligned}$$

Logo, tomando r com $0 < r < (1 - \lambda)\delta$, teremos $\varphi_y(\overline{B}_\delta(x_0)) \subset \overline{B}_\delta(x_0)$. \square

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA: Como

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{C^0} & f'(x) \in L(\mathbb{R}^n) \\ & & L \quad \xrightarrow{C^0} \quad \det L \end{array}$$

existe vizinhança de x_0 onde $Jf(x) \neq 0$. Vamos supor que essa vizinhança de x_0 seja A e que, para todo x em A , $f(x) = f(x_0) + \underbrace{df(x_0)}_L(x - x_0) + r(x)$, com

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0. \text{ Assim,}$$

$$f(x) = f(x_0) - L(x_0) + L(x + L^{-1}r(x)). \quad (3)$$

Mostraremos inicialmente que $L^{-1} \circ r$ é uma contração numa vizinhança aberta U de x_0 e concluiremos, por meio do Teorema da Perturbação da Identidade, que

f é um homeomorfismo dessa vizinhança aberta U sobre o aberto $f(U) = V$. Como a aplicação $x \in A \mapsto (L^{-1}r)'(x) \in (L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ é contínua e $(L^{-1}r)'(x_0) = L^{-1}r'(x_0) = 0$, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $B_\delta(x_0) \subset A$, cujos pontos verificam

$$\|(L^{-1}r)'(x)\|_1 < \frac{1}{2}. \text{ Justifique.}$$

Pela Proposição 3.24, como $B_\delta(x_0)$ é aberto convexo,

$$\|L^{-1}r(x) - L^{-1}r(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in B_\delta(x_0).$$

Logo, pelo Teorema da Perturbação da Identidade, $I + L^{-1} \circ r$ é um homeomorfismo do aberto $B_\delta(x_0)$ sobre o aberto $(I + L^{-1}r)(B_\delta(x_0))$ e, portanto, f é homeomorfismo do aberto $U = B_\delta(x_0)$ sobre o aberto $f(B_\delta(x_0)) = V$. Logo, $f: U \rightarrow V$ e sua inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ são aplicações abertas.

Temos que f^{-1} é diferenciável em $y = f(x) \in f(B_\delta)$ pois

$$\begin{aligned} & \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) - [df(f^{-1}(y))]^{-1}(\Delta y)}{\|\Delta y\|} = \\ &= \frac{f^{-1}(f(x + \Delta x)) - f^{-1}(f(x)) - [df(x)]^{-1}(f(x + \Delta x) - f(x))}{\|f(x + \Delta x) - f(x)\|} = \\ &= \frac{\Delta x - [df(x)]^{-1}(df(x)(\Delta x) + R(x))}{\|f(x + \Delta x) - f(x)\|} = -(df(x))^{-1} \left(\frac{R(x)}{\|df(x)(\Delta x) + R(x)\|} \right), \end{aligned}$$

com

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{\|\Delta x\|} = 0. \quad (4)$$

Quando $\Delta y \rightarrow 0$, como f^{-1} é contínua em y , temos $\Delta x \rightarrow 0$. Da injetividade de $df(x)$, segue que existe $c > 0$ tal que $\left\| df(x) \left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|} \right) \right\| \geq c > 0$. Como f é um homeomorfismo entre os abertos U e V , se necessário, diminuimos U e V de modo que possamos escrever, para $\Delta x \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{R(x)}{\|df(x)(\Delta x) + R(x)\|} \right\| = \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|} \frac{1}{\left\| df(x) \left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|} \right) + \frac{R(x)}{\|\Delta x\|} \right\|} \leq \\ & \leq \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|} \frac{1}{\left\| df(x) \left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|} \right) \right\| - \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|}} \leq \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|} \frac{1}{(c - \frac{\|R(x)\|}{\|\Delta x\|})}. \end{aligned}$$

Assim, $-(df(x))^{-1} \left(\frac{R(x)}{\|df(x)(\Delta x) + R(x)\|} \right) \rightarrow 0$, quando $\Delta x \rightarrow 0$. Logo, quando $\Delta y \rightarrow 0$ temos que $\Delta x \rightarrow 0$ e, portanto,

$$\frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) - [df(f^{-1}(y))]^{-1}(\Delta y)}{\|\Delta y\|} \rightarrow 0,$$

isto é, f^{-1} é diferenciável em todo $y \in V$.

Para mostrar que $f^{-1} \in C^1$ em V , basta olhar para

$$\begin{aligned} y &\stackrel{C^0}{\mapsto} f^{-1}(y) \\ x &\stackrel{C^0}{\mapsto} f'(x) \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\} \text{ (aberto)} \\ &\quad L \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\} \stackrel{C^0}{\mapsto} L^{-1} \end{aligned}$$

Se $f \in C^2$,

$$\begin{aligned} y \in V &\stackrel{C^1}{\mapsto} f^{-1}(y) \in U \\ x \in U &\stackrel{C^1}{\mapsto} f'(x) \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\} \\ &\quad L \in \{L \in L(\mathbb{R}^n) : L \text{ é inversível}\} \stackrel{C^\infty}{\mapsto} L^{-1} \end{aligned}$$

tem-se $y \in V \stackrel{C^1}{\mapsto} [df(f^{-1}(y))]^{-1} = df^{-1}(y)$ e, conseqüentemente, $f^{-1} \in C^2$ em V .

Deixamos ao leitor mostrar que se $f \in C^k$, $k > 2$, então $f^{-1} \in C^k$. \square

3.2. O Teorema da Função Implícita

MOTIVAÇÃO. Se $ax + by = c$, com $b \neq 0$, então $y = \frac{c - ax}{b}$.

TEOREMA 3.31. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$. Se $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ então existem abertos U e V de \mathbb{R} , $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ $U \times V \subset A$ de modo que, para todo $x \in U$, existe um único $y = y(x) \in V$ tal que $f(x, y(x)) = c$, sendo $y = y(x)$ de classe C^k .*

Nesse caso,

$$f(x, y(x)) = c \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Observe que a segunda frase das implicações acima diz que

$$\nabla f(x_0, y(x_0)) \cdot (1, y'(x_0)) = 0,$$

ou seja, o gradiente é perpendicular ao vetor tangente ao gráfico de $y = y(x)$.

A reta tangente à curva $f(x, y) = c$ em (x_0, y_0) é dada por:

- $y = y_0 + \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)} \cdot (x - x_0)$, ou
- $\nabla f(p_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0$, ou
- $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \left(1, \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)} \right)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- OBSERVAÇÃO 3.32. 1. Quando $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ então $f(x, y) = c$ é resolvida localmente em (x_0, y_0) por $x = x(y)$.
2. Quando $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, o teorema nada afirma. Por exemplo,
- (a) $f(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ localmente em $(0, 0)$ não é gráfico de $y = y(x)$ nem de $x = x(y)$.
- (b) $f(x, y) = x^3 - y^6 = 0$ localmente em $(0, 0)$ é o gráfico de $x = y^2$.

APLICAÇÃO 1. Pode a curva $x^2 + y + \operatorname{sen}xy = 0$ ser dada localmente em $(0, 0)$ como gráfico de $y = y(x)$? E de $x = x(y)$? Qual a reta tangente nesse ponto?

Solução: Temos $f(x, y) = x^2 + y + \operatorname{sen}xy \in C^\infty$, $f(0, 0) = 0$ e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 + x \cos xy \Big|_{(0,0)} = 1 \neq 0.$$

Assim, a equação pode ser resolvida por $y = y(x) \in C^\infty$ localmente em $(0, 0)$. A reta tangente à curva em $(0, 0)$ é dada por: $\nabla f(0, 0) \cdot ((x, y) - (0, 0)) = (0, 1) \cdot (x, y) = 0$, ou seja, por $y = 0$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2x + y \cos xy \Big|_{(0,0)} = 0$, o Teorema nada afirma. Para decidir se $x = x(y)$:

$$\begin{aligned} x^2 + y + \operatorname{sen}xy = 0 &\Rightarrow 2x + y' + (xy' + y) \cos xy = 0 \Rightarrow \\ 2 + y'' + (xy'' + 2y') \cos xy - (xy' + y)^2 \operatorname{sen}xy &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $x = 0$, obtemos $y'(0) = 0$ e $y''(0) = -2$, o que mostra que $y = y(x)$ tem ponto de máximo local em $x = 0$. Assim, a equação não pode ser dada localmente em $(0, 0)$ como gráfico de $x = x(y)$.

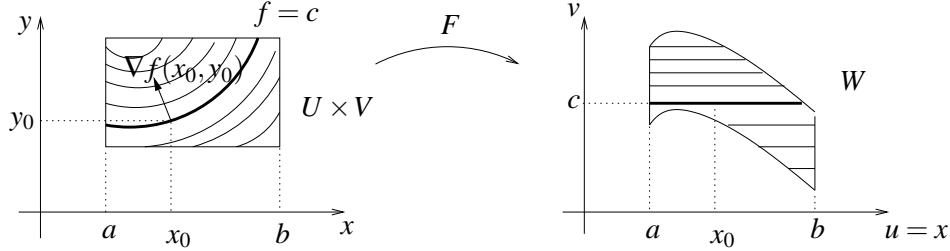
APLICAÇÃO 2. Dada $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, g de classe C^∞ , mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y = f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_0^{f(x)} (1+t^2)dt$ e que f é de classe C^∞ .

Solução: Considere, para cada $x \in \mathbb{R}$, o polinômio $p(y) = y + \frac{y^3}{3} - g(x)$, que é estritamente crescente, $\lim_{y \rightarrow \infty} p(y) = \infty$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} p(y) = -\infty$ e, portanto, tem uma única raiz $y = f(x)$. Seja $F(x, y) = g(x) - \int_0^y (1+t^2)dt$ que é de classe C^∞ em \mathbb{R}^2 , $F(x_0, f(x_0)) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0)) = -1 - f(x_0)^2 \neq 0,$$

para cada $x_0 \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, para cada x_0 , $F(x, y) = 0$ é dada localmente em $(x_0, f(x_0))$ por $y = y(x) \in C^\infty$. Como $y = f(x)$ obedece $F(x, f(x)) = 0$, então, pela unicidade, $f(x) = y(x) \in C^\infty$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.31:



Seja $F(x, y) = (x, f(x, y))$ de classe C^1 em A . Temos

$$JF(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{p_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos U e V de \mathbb{R} com (x_0, y_0) em $U \times V \subset A$ e aberto W de \mathbb{R}^2 com $(x_0, c) \in W$ tais que $F: U \times V \rightarrow W$ é bijetora,

com $F^{-1} \in C^k$, $F^{-1}: \begin{cases} x = u \\ y = y(u, v) \end{cases}$. Temos então

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = c\} = \\ & = F^{-1}(\{(x, c) \in W\}) = \{(x, y(x, c)) \in U \times V\}. \end{aligned}$$

Se necessário, diminuimos U para obter a tese. \square

MOTIVAÇÃO. Se $ax + by + cz = 0$, com $c \neq 0$, então $z = \frac{-ax - by}{c}$.

TEOREMA 3.33. Sejam $A \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , com $k \geq 1$. Dado $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, se $f(p_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$ então existem abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, z_0) \in U \times V \subset A$ de modo que, para todo $(x, y) \in U$, existe um único $z = z(x, y) \in V$ tal que $f(x, y, z(x, y)) = c$, sendo $z = z(x, y) \in C^k$.

Nesse caso, aplicando a Regra da Cadeia a $f(x, y, z(x, y)) = c$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \nabla f(p_0) \cdot \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\right) = 0 \\ \nabla f(p_0) \cdot \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Assim, } \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0)}.$$

O plano tangente à superfície $f(x, y, z) = c$ em $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é dado por

- a) $z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, ou
- b) $\nabla f(p_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ou
- c) $(x, y, z) = p_0 + \lambda \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) + \mu \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO 3.34. Nas hipóteses do teorema acima,

1. $\nabla f(p_0) \parallel \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) \wedge \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$.
2. Dada uma curva $\gamma(t) \in A$, $t \in]-\delta, \delta[$, derivável em $t = 0$, com $\gamma(0) = p_0$ e $f(\gamma(t)) = c$, podemos garantir que $\gamma'(0)$ é combinação linear dos vetores $\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right)$ e $\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$. De fato, se $f(\gamma(t)) = c$ então, pela Regra da Cadeia, $\nabla f(p_0) \cdot \gamma'(0) = 0$.

De outro modo, de $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(x(t), y(t)))$ tem-se

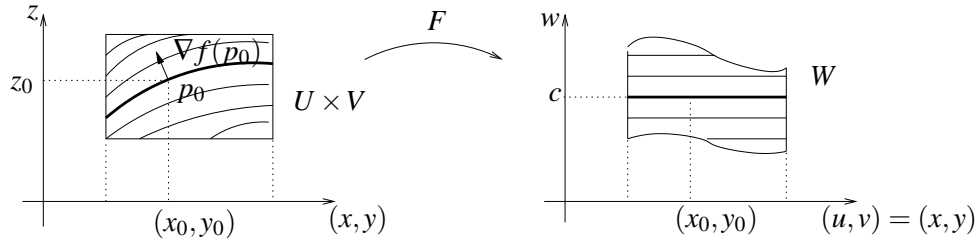
$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \left(x'(0), y'(0), \frac{\partial z}{\partial x}(p_0)x'(0) + \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)y'(0)\right) = \\ &= x'(0) \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) + y'(0) \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right). \end{aligned}$$

3. Dado um vetor w que é combinação linear dos vetores $\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right)$ e $\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$, afirmamos que existe uma curva $\gamma(t)$, $t \in]-r, r[$, tal que $\gamma(0) = p_0$, $f(\gamma(t)) = c$ e $\gamma'(0) = w$. De fato, sendo $w = \alpha \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(p_0)\right) + \beta \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right) = \left(\alpha, \beta, \alpha \frac{\partial z}{\partial x}(p_0) + \beta \frac{\partial z}{\partial y}(p_0)\right)$, consideramos a reta $(x, y) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta)$, $\forall t$. Para $r > 0$ suficientemente pequeno, a curva que procuramos é $\gamma(t) = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta))$, pois $\text{Im}\gamma$ está contida na superfície $f(x, y, z) = c$ e $\gamma'(0) = w$.
4. Em vista das duas observações anteriores, o plano tangente à superfície $f(x, y, z) = c$ em $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ coincide com o plano que passa por p_0 , gerado por todos os vetores velocidade das curvas deriváveis contidas na superfície $f = c$, no ponto p_0 .

APLICAÇÃO. A superfície $S : xy - z \ln y + e^{xz} = 1$ pode ser dada localmente em $(0, 1, 0)$ como gráfico de $x = x(y, z)$, pois $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, 0) = 1 \neq 0$, para $f(x, y, z) = xy - z \ln y + e^{xz}$. Como $\nabla f(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$, o plano tangente à S em $(0, 1, 0)$ é

dado por $x = 0$. Pode S ser dada localmente em $(0, 1, 0)$ como gráfico de $z = z(x, y)$ e $y = y(x, z)$? Observe que $f(0, 1, z) = 1$.

INDICAÇÃO DA PROVA DO TEOREMA 3.33: Seja $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. Temos $JF(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo (x_0, y_0) , $V \subset \mathbb{R}$ contendo z_0 e $W \subset \mathbb{R}^3$ contendo $F(x_0, y_0, z_0)$ tais que $F: U \times V \rightarrow W$ é difeomorfismo de classe C^k



$$F : \begin{cases} u = x \\ v = y \\ w = f(x, y, z) \end{cases} ; F^{-1} : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v, w) \end{cases} ;$$

e $\{(x, y, z) \in U \times V : f(x, y, z) = c\} = F^{-1}\{(u, v, c) \in W\} = \{(x, y, z) \in U \times V : z = g(x, y, c)\}$. Se necessário, diminuimos U para obter a tese.

MOTIVAÇÃO. Se $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$, com $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ então temos que $y = y(x)$ e $z = z(x)$.

TEOREMA 3.35. Sejam $f, g: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto A , $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$, $f(p_0) = c_1$ e $g(p_0) = c_2$. Se $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(p_0) \neq 0$ então existe um aberto $U \times V$, $(x_0, y_0, z_0) \in U \times V \subset A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, tal que os únicos pontos de $U \times V$ que obedecem $\begin{cases} f(x, y, z) = c_1 \\ g(x, y, z) = c_2 \end{cases}$ são os do gráfico de uma função C^k $(y, z) = (y(x), z(x)) \in V$ definida em U .

Nesse caso, temos, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 0 & \Leftrightarrow \nabla f \cdot (1, y', z') = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}y' + \frac{\partial g}{\partial z}z' = 0 & \Leftrightarrow \nabla g \cdot (1, y', z') = 0 \end{cases}$$

$$\text{e daí } y'(x_0) = \frac{-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}(p_0)}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(p_0)} \quad \text{e} \quad z'(x_0) = \frac{-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}(p_0)}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(p_0)}.$$

A *reta tangente* à curva $\begin{cases} f(x,y,z) = c_1 \\ f(x,y,z) = c_2 \end{cases}$ em p_0 pode ser dada por

- $(x, y, z) = p_0 + \lambda(1, y'(x_0), z'(x_0))$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ou
- $\begin{cases} \nabla f(p_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ \nabla g(p_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \end{cases}$, ou
- $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(p_0) \wedge \nabla g(p_0)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

NOTAÇÃO. No Teorema 3.35, $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}$ indica o jacobiano de

$$F(y, z) = (f(x_0, y, z), g(x_0, y, z))$$

no ponto (y_0, z_0) , ou seja, o determinante de $F'(y_0, z_0)$.

PROVA DO TEOREMA 3.35: Faça como exercício.

APLICAÇÃO.

- Verificar se o sistema $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$ pode ser resolvido localmente em $(0, 1, 1)$ por $y = y(x)$ e $z = z(x)$.
- Idem em $(1, 0, 0)$.

Mais geralmente, consideremos o sistema de k equações e $n + k$ incógnitas

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = c_k \end{cases}$$

que podemos escrever $f(x, y) = c$, em que

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_k), \quad c = (c_1, \dots, c_k) \quad \text{e} \quad f = (f_1, \dots, f_k).$$

TEOREMA 3.36 (Teorema da Função Implícita). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ um aberto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^p , $p \geq 1$, $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)}(x_0, y_0) \neq 0$. Então existem abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ com $(x_0, y_0) \in U \times V \subset A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, tais que, para todo $x \in U$, existe um único $y = y(x) \in V$ tal que $f(x, y(x)) = c$ e $y = y(x) \in C^p$.*

Nesse caso, aplicando a Regra da Cadeia a $f(x, y(x)) = c$, temos

$$f'(x, y(x)) \begin{pmatrix} I \\ y'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ y'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y'(x) = 0 \Rightarrow D_x f(x, y) + D_y f(x, y)Dy(x) = 0.$$

Portanto,

$$Dy(x_0) = -[D_y f(x_0, y_0)]^{-1} D_x f(x_0, y_0).$$

Com outra notação, de

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_k(x_1, \dots, x_n)) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_k(x_1, \dots, x_n)) = c_k \end{cases}$$

temos, para todo $i = 1, \dots, k$:

$$\begin{cases} \nabla f_i(x, y(x)) \cdot v_1 = 0 \\ \vdots \\ \nabla f_i(x, y(x)) \cdot v_n = 0 \end{cases}$$

em que

$$\begin{cases} v_1 = \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial y_k}{\partial x_1}(x_0) \right) \\ v_2 = \left(0, 1, \dots, 0, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial y_k}{\partial x_2}(x_0) \right) \\ \vdots \\ v_n = \left(0, 0, \dots, 1, \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(x_0), \dots, \frac{\partial y_k}{\partial x_n}(x_0) \right), \end{cases}$$

O plano tangente a $S = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$ no ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ é o plano dado por

1. $(x, y) = (x_0, y_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, para todo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, ou
2. $\begin{cases} [(x, y) - (x_0, y_0)] \cdot \nabla f_1(x_0, y_0) = 0 \\ \vdots \\ [(x, y) - (x_0, y_0)] \cdot \nabla f_k(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$, ou
3. $\{p_0 + \gamma'(0), \text{ para toda curva } \gamma \text{ definida numa vizinhança de } t = 0, \gamma(0) = p_0, \text{ derivável em } 0 \text{ com } f(\gamma(t)) = c\}$.

IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.36:

Seja $F(x, y) = (x, f(x, y))$, que é C^p em A . Temos $F(x_0, y_0) = (x_0, c)$ e

$$JF(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U \times V \subset A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $(x_0, y_0) \in U \times V$ e $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ com $(x_0, c) \in W$ tais que $F: U \times V \rightarrow W$ é difeomorfismo de

classe C^p , $p \geq 1$.

$$F : \begin{cases} u = x \\ v = f(x, y) \end{cases} \quad F^{-1} : \begin{cases} x = u \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Além disso,

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = c\} = F^{-1}\{(u, c) \in W\} = \{(x, y) \in U \times V : y = y(x, c)\}.$$

Diminuindo U , se necessário, obtemos a tese. \square

OBSERVAÇÃO 3.37. Segue, dessa demonstração, que existem abertos $\mathcal{W} \subset U \times V$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{W}$ e $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset W$, $(x_0, c) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ tais que \mathcal{W} é a união de gráficos de funções $y = y(x, c')$, definidas e de classe C^p em \mathcal{U} que estão nas superfícies de nível $f(x, y) = c'$, com $c' \in \mathcal{V}$.

APLICAÇÕES.

1. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ um polinômio de grau n e coeficientes reais com uma raiz real simples x_0 . Então todo polinômio de grau n com coeficientes reais suficientemente próximo de $p(x)$ tem uma raiz real simples próxima de x_0 que varia em classe C^∞ com os coeficientes do polinômio. (a distância entre os polinômios $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ e $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ é a distância entre (b_0, b_1, \dots, b_n) e (a_0, a_1, \dots, a_n) no \mathbb{R}^{n+1} .)

Solução: Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, b_0, b_1, \dots, b_n) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n.$$

Considerando $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ temos $F(x_0, a) = 0$. Além disso, temos que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, a) = p'(x_0) \neq 0$, pois x_0 é raiz simples de p . Pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos $V \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $x_0 \in V$, $a \in U$, tais que, para todo $b \in U$, existe um único $x = x(b) \in V$ verificando $F(x(b), b) = b_0 + b_1x(b) + \dots + b_n(x(b))^n = 0$ e $x = x(b) \in C^\infty$. Como $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, a) \neq 0$, podemos diminuir eventualmente $U \times V$ para ter $\frac{\partial F}{\partial x}(x(b), b) \neq 0$ e concluir que $x = x(b)$ é simples.

2. Seja $f(\lambda, x)$ uma família de funções $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é, $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$, $f \in C^1$. Supondo que f_{λ_0} tenha um ponto fixo x_0 , enuncie e prove um resultado que garanta a existência e unicidade de ponto fixo, próximo de x_0 , para toda f_λ com λ próximo de λ_0 .

Indicação: Considerar $F(\lambda, x) = f(\lambda, x) - x$. Assim,

$$F(\lambda_0, x_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda_0, x_0) - 1.$$

Supor $\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda_0, x_0) \neq 1$ e aplicar o Teorema da Função Implícita.

DEFINIÇÃO. Um número real c é *valor regular* de $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto A se $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ e, para todo $x \in f^{-1}(c)$, $df(x)$ é sobrejetora (isto é, $\nabla f(x) \neq 0$).

Nesse caso, segue do Teorema da Função Implícita que, localmente em cada ponto, $f^{-1}(c)$ é o gráfico de uma função real de classe C^k de $n - 1$ variáveis. Diremos que $f^{-1}(c)$ é uma *superfície regular* (ou *superfície*) de classe C^k e dimensão $n - 1$ ou codimensão 1. O *plano tangente* em $p \in f^{-1}(c)$ é dado por

$$\nabla f(p) \cdot (x - p) = 0.$$

EXEMPLO 3.38.

1. A circunferência $x^2 + y^2 = 1$ em \mathbb{R}^2 .
2. O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ em \mathbb{R}^3 .
3. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em \mathbb{R}^3 .
4. A curva “V” não é imagem inversa de valor regular.
5. O gráfico de $g: A \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto A é superfície regular de codimensão 1 e classe C^1 . Indicação: $f(x, y) = y - g(x) = 0$.
6. A superfície de \mathbb{R}^3 obtida pela rotação do gráfico de $z = z(x) \in C^1$, $x \in]a, b[$, $0 < a$, em torno do eixo z é uma superfície regular de classe C^1 e codimensão 1.
7. Dar a equação do toro obtido pela rotação da circunferência dada por $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ em torno do eixo z e verificar que é uma superfície de codimensão 1, dando sua classe e seu plano tangente em cada ponto.
8. O cone $z^2 = x^2 + y^2$ não é imagem inversa de valor regular. Verifique.

DEFINIÇÃO. Diremos que $c \in \mathbb{R}^k$ é *valor regular* de $f: A \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^p , $p \geq 1$, no aberto A se $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ e, para todo $x \in f^{-1}(c)$, $df(x)$ é sobrejetora (isto é, se os vetores $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)$ são linearmente independentes).

Nesse caso, segue do Teorema da Função Implícita que, localmente em cada ponto, $f^{-1}(c)$ é o gráfico de uma função de classe C^p de n variáveis com k coordenadas.

Diremos que $f^{-1}(c)$ é uma *superfície regular* (ou *superfície*) de classe C^p e dimensão n em \mathbb{R}^{n+k} ou de codimensão k . O *plano tangente* em $p \in f^{-1}(c)$ é dado por

$$\begin{cases} \nabla f_1(p) \cdot (x - p) = 0 \\ \nabla f_2(p) \cdot (x - p) = 0 \\ \vdots \\ \nabla f_k(p) \cdot (x - p) = 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 3.39.

1. A curva $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ não é imagem inversa de valor regular. Justifique.
2. O gráfico de $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^1 no aberto A é imagem inversa de valor regular: é uma superfície de dimensão n em \mathbb{R}^{n+k} e seu plano tangente em $(x_0, g(x_0))$ é dado por $y = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0)$. Justifique.

3.3. Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção mostraremos que os extremos locais de funções reais $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ quando restritas a superfícies $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^m$, de codimensão k , podem ser encontrados entre as soluções do sistema de $m + k$ equações com $m + k$ incógnitas

$$\begin{cases} \nabla g = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i \\ f(x) = c \end{cases}$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são incógnitas adicionais, chamadas de *multiplicadores de Lagrange*.

Inicialmente vejamos a seguinte condição necessária para um ponto ser extremo local de uma função real.

PROPOSIÇÃO 3.40. *Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tem todas as derivadas parciais em um extremo local p , então, $\nabla f(p) = 0$.*

TEOREMA 3.41. *Sejam $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $S = f^{-1}(c)$, em que c é valor regular de $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto A . Se $p \in S$ é extremo local de g condicionada a S então $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Nesse caso, os extremos locais de g restrita a S estão entre as soluções de

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = c \\ \nabla g(x) = \lambda \nabla f(x) \end{cases}$$

INDICAÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO:

- (i) Supondo $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$, localmente em p , S é o gráfico de uma função $y = y(x) \in C^1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ e $p = (x_0, y(x_0))$;
- (ii) x_0 é extremo local de $\varphi(x) = g(x, y(x))$;
- (iii) $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = \nabla g(p) \cdot \left(0, \dots, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_0)\right) = 0, \forall i = 1, \dots, n-1$;
- (iv) $\nabla g(p)$ é perpendicular ao plano tangente a S em p_0 .

APLICAÇÃO. Determine os extremos absolutos de $g(x, y, z) = x + y + z$ condicionada à esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução: Como g é contínua e S é compacta, g assume os extremos absolutos quando restrita a S , que são locais. Como S é uma superfície regular de classe C^1 e g é diferenciável, podemos procurar esses extremos entre as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} = 1 = \lambda x \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 1 = \lambda y \\ \frac{\partial g}{\partial z} = 1 = \lambda z \end{cases}$$

que são

$$\lambda = \pm\sqrt{3}, \text{ e } (x, y, z) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1).$$

Como $g(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)) = \pm\sqrt{3}$ então $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ é ponto de máximo absoluto e $-\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ é ponto de mínimo absoluto.

TEOREMA 3.42 (Multiplicadores de Lagrange). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um conjunto aberto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}^k$ valor regular de f . Se $g: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que assume extremo local num ponto $p_0 \in f^{-1}(c)$ quando condicionada à superfície $f^{-1}(c)$ então existem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que $\nabla g(p_0) = \lambda_1 \nabla f_1(p_0) + \dots + \lambda_k \nabla f_k(p_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que, localmente em $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, a superfície $f(x, y) = c$ seja dada por $y = y(x) \in C^1$. A função definida por $\varphi(x) = g(x, y(x))$, ou seja, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, y_1(x), \dots, y_k(x))$ assume extremo local em x_0 . Logo, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = \nabla g(p_0) \cdot \left(0, \dots, 1, 0, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x_0)\right) = 0,$$

isto é, $\nabla g(p_0)$ é ortogonal à superfície $f^{-1}(c)$ em p_0 . Assim,

$$\nabla g(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(p_0).$$

□

APLICAÇÃO. Determine os extremos absolutos de $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ restrita à curva

$$\gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solução:

- (i) γ é uma curva regular C^1 e g é diferenciável;
- (ii) g restrita a γ assume extremos absolutos, que são locais, pois g é contínua e γ é compacto;
- (iii) Entre as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 3x^2 = \lambda x + \mu \\ 3y^2 = \lambda y + \mu \\ 3z^2 = \lambda z + \mu \end{cases}$$

estão os extremos procurados. Temos

$$\begin{cases} 3(x^2 - y^2) = \lambda(x - y) \\ 3(x^2 - z^2) = \lambda(x - z) \\ 3(y^2 - z^2) = \lambda(y - z) \end{cases} \quad (5)$$

Com $x = y$ ou $y = z$ ou $x = z$, obtemos os pontos $(0, 0, 1)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(0, 1, 0)$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(1, 0, 0)$ e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. O sistema não admite outras soluções, pois se x, y, z forem distintos entre si, de (5), teríamos:

$$3(x + y) = 3(x + z) = 3(y + z) \Rightarrow x = y = z.$$

Calculando g nos seis pontos encontrados, obtemos que $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são os pontos de máximo absoluto e os outros, pontos de mínimo absoluto.

3.4. O Teorema da Imersão

Neste parágrafo, mostraremos que se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $k > 0$, de classe C^1 tem $f'(x_0)$ de posto máximo, então, numa vizinhança U de x_0 , f é injetora com inversa contínua. Além disso, veremos que, a menos de mudança de coordenadas,

localmente em x_0 , f é uma inclusão. Consideraremos $k > 0$ pois o caso $k = 0$ corresponde ao Teorema da Função Inversa já estudado.

DEFINIÇÃO. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ de classe C^1 é denominada *imersão* em x_0 se $f'(x_0)$ é injetora.

OBSERVAÇÃO 3.43. Se f é imersão em x_0 então existe vizinhança de x_0 na qual f é imersão.

De fato, basta supor $f(x) = (u(x), v(x)) \in \mathbb{R}^{n+k}$ com $Ju(x_0) \neq 0$ e considerar que a composta

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{C^0} & u'(x) \in L(\mathbb{R}^n) \\ & & L \quad \xrightarrow{C^0} \quad \det L \end{array}$$

calculada em x_0 é diferente de 0.

PROPOSIÇÃO 3.44. Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ de classe C^1 no aberto A é uma imersão em x_0 então f é localmente injetora em x_0 , isto é, existe vizinhança aberta U de x_0 tal que $f: U \rightarrow f(U)$ é injetora. Além disso, $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Para x, y numa vizinhança V de x_0 , temos:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(y) = \\ &= f'(x_0)(x - x_0) + r(x) - f'(x_0)(y - x_0) - r(y), \end{aligned}$$

em que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0$. Assim,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f'(x_0)(x - y) + r(x) - r(y)\| \geq \|f'(x_0)(x - y)\| - \|r(x) - r(y)\|.$$

Como $L = f'(x_0)$ é linear e injetora, existe $c > 0$ tal que $\|L(x)\| \geq c\|x\|$. Dessa forma,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\| - \|r(x) - r(y)\|.$$

Como r' é contínua em x_0 e $r'(x_0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p_0) \subset V$ e $\|r'(x)\|_1 < \frac{c}{2}$, para todo $x \in B_\delta(p_0)$. Logo,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\| - \frac{c}{2}\|x - y\|, \text{ para } x, y \in B_\delta(p_0).$$

Portanto, $\|f(x) - f(y)\| \geq \frac{c}{2}\|x - y\|$, o que implica que f é injetora no aberto $U = B_\delta(p_0)$ e a sua inversa é contínua. \square

EXEMPLO 3.45.

1. Se $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ é linear injetora então é imersão. Observe que, neste caso, $L(\mathbb{R}^n)$ tem dimensão n e é gráfico de função de n variáveis e k coordenadas.

2. Seja $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ imersão em t_0 . Supondo $x'(t_0) \neq 0$, segue do Teorema da Função Inversa que $x(t)$ é um difeomorfismo local de classe C^1 em t_0 , isto é, existem abertos U contendo t_0 e V contendo $x(t_0)$ tais que $x: U \rightarrow V$ é bijetora com inversa $t = t(x) \in C^1$. Neste caso,

$$\gamma(U) = \{(x(t), y(t)) : t \in U\} = \{(x, y(t(x))) : x \in V\},$$

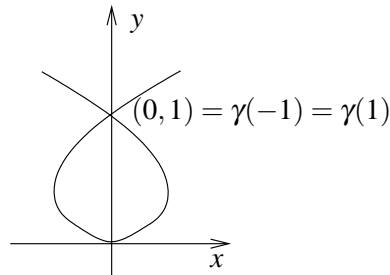
isto é, $\gamma(U)$ é o gráfico de uma função de classe C^1 .

3. Seja $\gamma:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ derivável em $]a, b[$. Se $x'(t) \neq 0$, para todo t , então x é um difeomorfismo entre $]a, b[$ e um intervalo aberto J com inversa $t = t(x)$ derivável (ver Teorema 3.25). Neste caso,

$$\gamma(]a, b[) = \{(x(t), y(t)) : t \in]a, b[\} = \{(x, y(t(x))) : x \in J\},$$

isto é, $\gamma(]a, b[)$ é o gráfico de uma função derivável.

4. A curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ é imersão em \mathbb{R} , não injetora.
 5. A curva $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2)$ é imersão em \mathbb{R} , não injetora. Observando na figura a imagem de γ , você vê contradição com o exemplo 2 aplicado em $t_0 = 0$?



6. A figura abaixo não pode ser imagem de imersão de \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 . Justifique.



7. Considere $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ uma imersão de classe C^1 . Supondo que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$, segue do Teorema da Função

Inversa que $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ é um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos

de \mathbb{R}^2 , U contendo (u_0, v_0) e V contendo $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ com inversa

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}. \text{ Logo,}$$

$$\sigma(U) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in U\} =$$

$$= \{(x, y, z(u(x, y), v(x, y))) : (x, y) \in V\}$$

isto é, $\sigma(U)$ é o gráfico de uma função real de classe C^1 definida em $V \subset \mathbb{R}^2$.

8. O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de \mathbb{R}^3 é imagem da imersão C^∞ $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$.
9. Verifique se $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$ é uma imersão e determine $\text{Im}\sigma$.
10. Idem para $\sigma: \begin{cases} x = (b + a \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (b + a \cos \varphi) \sin \theta \\ z = a \sin \varphi \end{cases}$ com $0 < a < b$
11. Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é de classe C^1 no aberto A então o gráfico de f é imagem de imersão de classe C^1 . Basta considerar $F(x) = (x, f(x))$.
12. A inclusão $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $f(x) = (x, 0)$ é imersão.

TEOREMA 3.46 (Teorema da Imersão). *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $p > 0$, de classe C^1 , se $f'(x_0)$ é injetora então existe aberto U com $x_0 \in U$ tal que $f(U)$ é o gráfico de uma função de classe C^1 definida num aberto de \mathbb{R}^n com p componentes.*

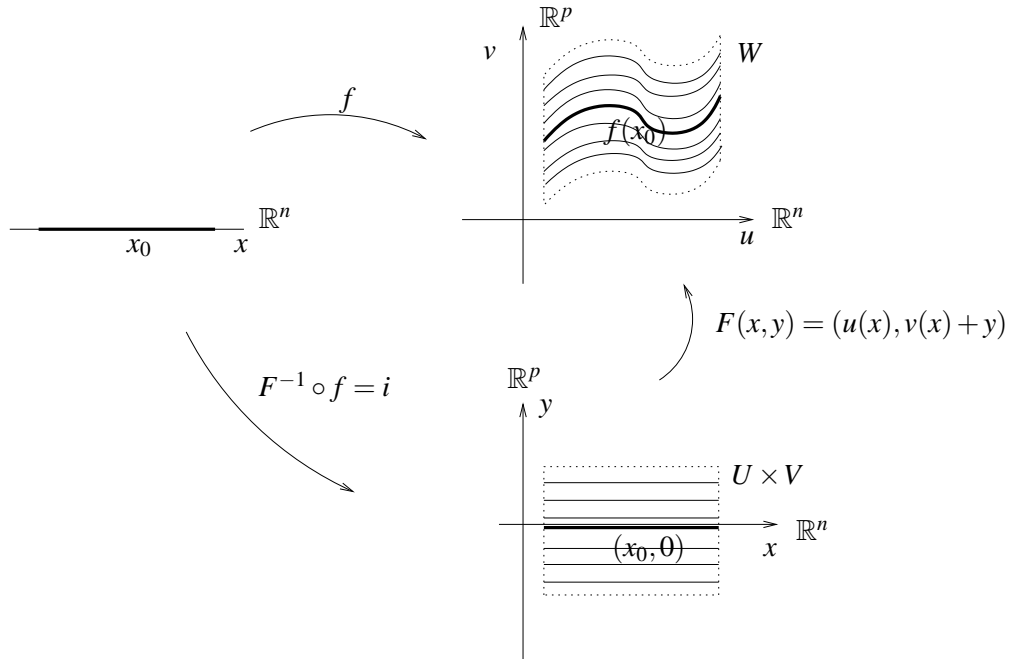
DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor, eventualmente reordenando as coordenadas de f , que $f(x) = (u(x), v(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ com $u'(x_0)$ injetora. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos U e V de \mathbb{R}^n , $x_0 \in U$, $u(x_0) \in V$ tais que $u: U \rightarrow V$ é bijetora com inversa $x = x(u) \in C^1$. Logo,

$$f(U) = \{(u(x), v(x)) : x \in U\} = \{(u, v(x(u))) : u \in V\}.$$

Daí podemos concluir diretamente sem usar a Proposição 3.44 que $f|_U$ é injetora com inversa contínua. \square

Nas condições do teorema anterior, para mostrar que, localmente em x_0 , f é, a menos de mudança de coordenadas, uma inclusão, consideramos $F: A \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ dada por $F(x, y) = (u(x), v(x) + y)$.

Como $dF(x_0, 0) = \begin{pmatrix} du(x_0) & 0 \\ dv(x_0) & I \end{pmatrix}$ é isomorfismo, então, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U \times V$ e W de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, com $(x_0, 0) \in U \times V$ e $F(x_0, 0) = f(x_0) \in W$ tais que a função $F: U \times V \rightarrow W$ é difeomorfismo de classe C^1 com inversa $F^{-1} = h$.



Temos $h \circ f(x) = (x, 0)$ em U . Logo, a menos do difeomorfismo h , f restrita a U é uma inclusão. Assim, obtivemos a seguinte versão do Teorema da Imersão:

TEOREMA 3.47. *Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $p > 0$, de classe C^1 no aberto A , é imersão em x_0 , então existe um difeomorfismo de classe C^1 : $h: W \rightarrow U \times V$ entre abertos $W \subset \mathbb{R}^{n+p}$ contendo $f(x_0)$ e $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ contendo $(x_0, 0)$ tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$ em U .*

3.5. O Teorema da Submersão

Veremos, nesta seção, que se $f: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $n > 0$, de classe C^1 tem $f'(p_0)$ com posto máximo, então, localmente em p_0 , f é aberta, não é injetora e, a menos de mudança de coordenadas, é uma projeção. E se $n = 0$?

DEFINIÇÃO. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 é dita uma *submersão* em p_0 se $f'(p_0)$ é sobrejetora (portanto, $n \geq m$).

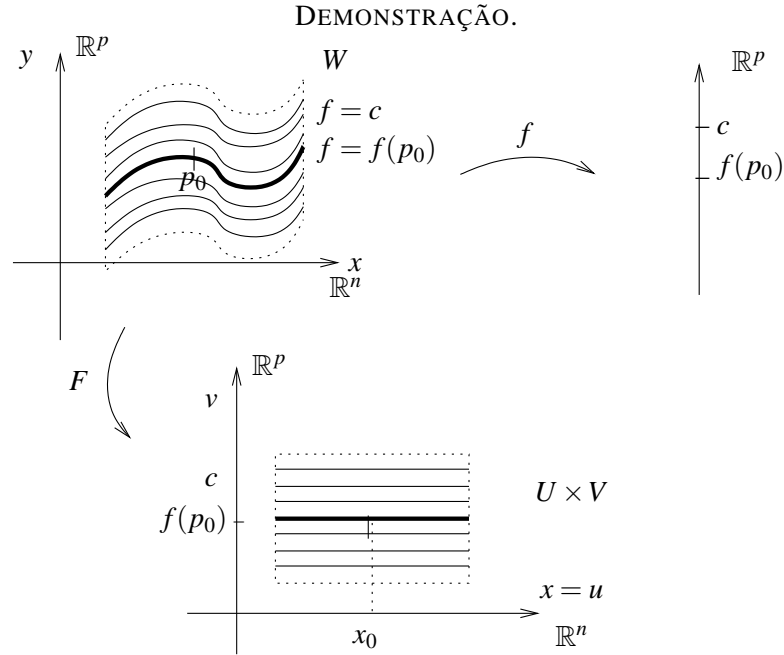
OBSERVAÇÃO 3.48. Se f é submersão em x_0 , então f é submersão numa vizinhança de x_0 .

EXEMPLO 3.49.

1. $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x, y) = x$ é submersão.
2. $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear sobrejetora é uma submersão e $\text{Im}L$ é aberto de \mathbb{R}^n .

3. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 com $\nabla f(x) \neq 0$ é submersão.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ é submersão em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

TEOREMA 3.50 (Teorema da submersão). *Seja $f: A \subset \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n > 0$, de classe C^1 no aberto A com $f'(p_0)$ sobrejetora. Então existe um aberto W contendo p_0 tal que $f(W)$ é aberto de \mathbb{R}^p .*



Podemos supor que $f: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f'(p_0) = \begin{pmatrix} f'_x(p_0) & f'_y(p_0) \end{pmatrix}$ com $f'_y(p_0)$ injetora (eventualmente reordenando as coordenadas). Se $F(x, y) = (x, f(x, y))$ então

$$JF(p_0) = \begin{vmatrix} I & 0 \\ f'_x(p_0) & f'_y(p_0) \end{vmatrix} = \det f'_y(p_0) \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $W \subset A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ contendo o ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ e $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ contendo $(x_0, f(p_0))$ tais que $F: W \rightarrow U \times V$ é difeomorfismo de classe C^1 .

Como $f = \pi_2 \circ F$, então $f(W) = \pi_2(F(W)) = \pi_2(U \times V) = V$ é aberto.

Observe também que, em $U \times V$, $f \circ F^{-1}(u, v) = \pi_2(u, v) = v$, isto é, a menos de um difeomorfismo, f restrita a W é uma projeção. \square

COROLÁRIO 3.51. *Seja $f: A \subset \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n > 0$, submersão de classe C^1 no aberto A . Então f é aberta e não é injetora.*

DEMONSTRAÇÃO. Verifiquemos que f é aberta: dado $B \subset A$ aberto, como $f|_B$ é submersão, para cada $x \in B$, existe $U_x \subset B$ aberto, $x \in U_x$, tal que $f(U_x)$ é aberto. Como $B = \bigcup_{x \in B} U_x$, então $f(B) = \bigcup_{x \in B} f(U_x)$ é aberto.

A função f não é injetora, pois pelo Teorema da Função Implícita, o conjunto $f(x) = f(p_0)$, localmente em p_0 é um gráfico de uma função de n variáveis com p coordenadas. \square

3.6. O Teorema do Posto

Consideraremos, nesta parte, o caso em que o posto da derivada de $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ não é máximo, mas constante num aberto. Os exemplos seguintes sugerem um enunciado para o Teorema do Posto.

OBSERVAÇÕES E MOTIVAÇÃO.

1. Se $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear, com posto $L = k$ (portanto, $k \leq \min(m, n)$), então $L(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de dimensão k .
2. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $f: \begin{cases} u = \cos(x+y) \\ v = \sin(x+y) \end{cases}$, temos posto $f' = 1$ em \mathbb{R}^2 e $\text{Im } f = \{(u, v) : u^2 + v^2 = 1\}$ é uma curva em \mathbb{R}^2 , tem dimensão 1.
3. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tem posto $f' = 0$ em \mathbb{R}^2 , então f é constante e $\text{Im } f$ tem dimensão zero.
4. Se $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $f: \begin{cases} u = x - y + z \\ v = (x - y + z)^3 \\ w = 2(x - y + z) \end{cases}$, temos posto $f' = 1$ em \mathbb{R}^3 e $\text{Im } f = \{(u, u^3, 2u) : u \in \mathbb{R}\}$ é uma curva em \mathbb{R}^3 , tem dimensão 1.
5. Se $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $f: \begin{cases} u = x + y \\ v = z^3 \\ w = x + y + z^3 \end{cases}$, temos posto $f' = 2$, para $z \neq 0$, e $\text{Im } f = \{(u, v, u + v) : u, v \in \mathbb{R}\}$ é um plano em \mathbb{R}^3 , tem dimensão 2.
6. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $f: \begin{cases} u = x + y \\ v = 2(x + y) \\ w = 5 \end{cases}$, temos posto $f' = 1$ e $f(\mathbb{R}^2) = \{(u, 2u, 5) : u \in \mathbb{R}\}$ é uma reta de \mathbb{R}^3 , tem dimensão 1.
7. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 e posto $f'(x_0) = k$ então existe uma vizinhança de x_0 , na qual posto $f' \geq k$.

Consideremos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 . Quando o posto de $f'(p_0)$ é máximo, os Teoremas da Função Inversa ($n = m$), da Imersão ($n < m$) e da Submersão

($m > n$) garantem que existe uma vizinhança $V(p_0)$ de p_0 tal que $f(V(p_0))$ tem dimensão igual ao posto de $f'(p_0)$. Quando o posto de f' é zero numa vizinhança de p_0 , então f é constante em uma vizinhança $V(p_0)$. Quando o posto $f'(p_0) \neq 0$ não é máximo mas é constante e igual a p numa vizinhança de p_0 então o Teorema do Posto garantirá que existe uma vizinhança $V(p_0)$ tal que $f(V(p_0))$ tem dimensão p , que f não é injetora e que, a menos de mudanças de coordenadas, ela é, localmente em p_0 , uma projeção.

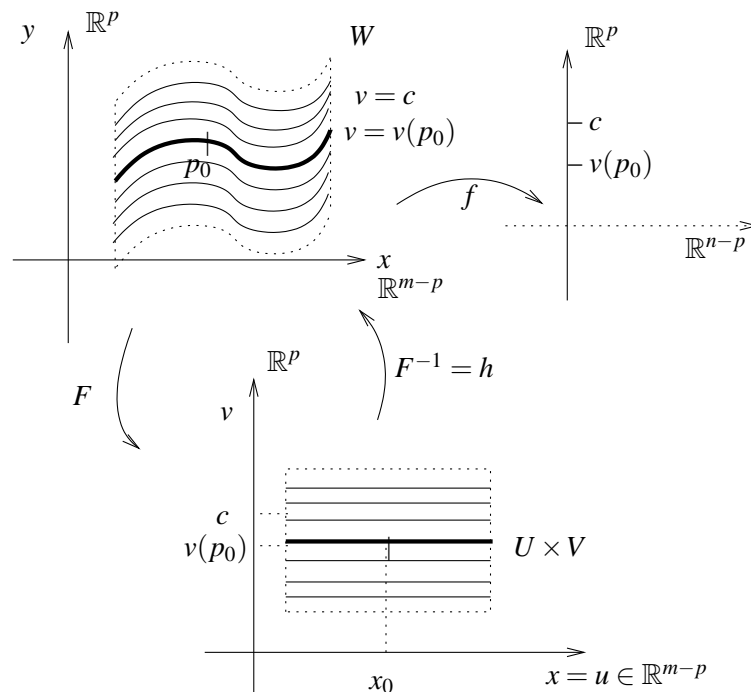
TEOREMA 3.52 (Teorema do Posto). *Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto A com posto $f' = \text{constante} = p$, $0 < p < \min\{m, n\}$, numa vizinhança de $p_0 \in A$. Então existe um aberto $W \subset A$ contendo p_0 tal que $f(W)$ é o gráfico de uma função de classe C^1 definida num aberto de \mathbb{R}^p com $n - p$ coordenadas.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor que, para $(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$,

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$$

e $D_y v(x, y)$ é injetora. Considere o difeomorfismo de classe C^1 $F: W \rightarrow U \times V$, $F(x, y) = (x, v(x, y))$ entre abertos W contendo $p_0 = (x_0, y_0)$ e $U \times V \subset \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$ contendo $(x_0, v(x_0, y_0))$.

Se $F^{-1} = h$, temos $v \circ h(u, v) = v$ e $v \circ h(U \times V) = v(W) = V$.



Daí,

$$\begin{aligned} f(W) &= f(h(U \times V)) = \{f \circ h(u, v) : (u, v) \in U \times V\} = \\ &= \{(\lambda(u, v), v) : (u, v) \in U \times V\}. \end{aligned}$$

Observe que λ é de classe C^1 .

Agora mostraremos que $\lambda(u, v) = \lambda(v)$ em $U \times V$. Como

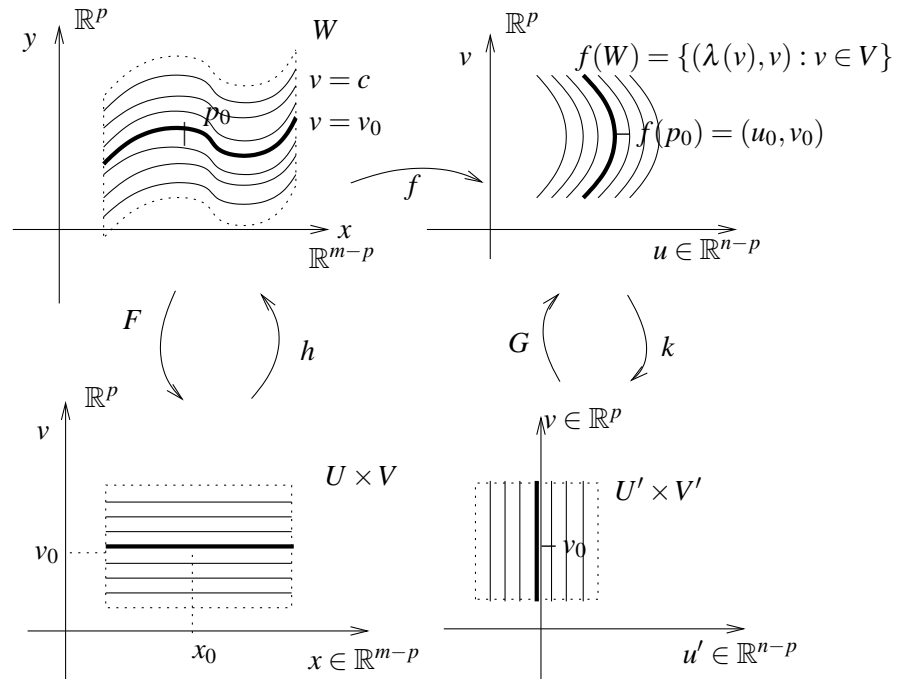
$$D(f \circ h)(u, v) = \begin{pmatrix} D_u \lambda & D_v \lambda \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = Df(h(u, v)) \cdot Dh(u, v)$$

tem posto p , pois $Df(h(u, v))$ tem posto p e $Dh(u, v)$ é isomorfismo, então $D_u \lambda = 0$ em $U \times V$. E, como o aberto U pode ser tomado conexo, segue que $\lambda = \lambda(v)$. Assim, concluímos que $f(W) = \{(\lambda(v), v) : v \in V\}$. Observar que f não é injetora em W . \square

OBSERVAÇÃO 3.53. Para obter outra versão do Teorema do Posto, nas condições anteriores, consideremos a função dada por $G(u', v) = (\lambda(v) + u', v)$ definida numa vizinhança de $(0, v_0)$ em $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ com valores em $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$. Temos $G(0, v_0) = (u_0, v_0) = f(p_0)$ e $JG(0, v_0) = \det \begin{pmatrix} I & D\lambda(v_0) \\ 0 & I \end{pmatrix} \neq 0$. Logo, G é um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U' \times V'$ contendo $(0, v_0)$ e W' contendo $f(p_0)$ com inversa $G^{-1} = k$. Assim, concluímos que, diminuindo eventualmente U e V , temos

$$(k \circ f \circ h)(u, v) = k(\lambda(v), v) = (0, v) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p,$$

para $(u, v) \in U \times V \subset \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$.



COROLÁRIO 3.54. *Se $f: A \subset \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ é de classe C^1 no aberto A e $n > 0$ então f não é injetora.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $r = \max\{\text{posto } f'(x) : x \in A\} = \text{posto } f'(p_0)$. Existe uma vizinhança de p_0 na qual $\text{posto } f'(x) = r$. Se $r = 0$ então f é constante. Se $r = p$, segue do Teorema da Submersão. Se $0 < r < p$, segue do Teorema do Posto. □

Exercícios

1. Mostre que, em \mathbb{R}^n , vale:
 - (a) $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ (desigualdade de Cauchy Schwarz)
 - (b) $|x \cdot y| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x$ e y são linearmente dependentes.
 - (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
 - (d) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ com $\lambda \geq 0$.
 - (e) $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
 - (f) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

2. Mostre que $\det \begin{pmatrix} A_{k \times k} & 0 \\ C_{n \times k} & D_{n \times n} \end{pmatrix} = \det A \det D$.
 (Sugestão: mostre $\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ C_{n \times k} & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$)

3. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então $\overset{\circ}{\partial} A = \emptyset$. Dê exemplo de $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que ∂D é aberto não vazio.

4. Dê exemplo de aberto $A \subset \mathbb{R}$ que contém todos os racionais do intervalo $[0, 1]$ mas não contém $[0, 1]$.

5. Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R}^n .
 - (a) Mostre que $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ e $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.
 - (b) Dê exemplo em que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{A \cup B}$.

6. Se A, B e S são subconjuntos de \mathbb{R}^n , mostre que são falsas as afirmações:
 - (a) $A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B$;
 - (b) $\partial S = \partial \bar{S}$;
 - (c) $\partial S = \partial \overset{\circ}{S}$;
 - (d) $\overset{\circ}{S} = \bar{S}$;
 - (e) $(\partial S)^\circ = \emptyset$;
 - (f) $\partial A \cap \partial B \subset \partial(A \cap B)$.

7. Sejam D e A_i subconjuntos de \mathbb{R}^n . Mostre que
- \overline{D} e ∂D são fechados;
 - se $D \subset F$ e F é fechado de \mathbb{R}^n então $\overline{D} \subset F$;
 - $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$;
 - $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$;
 - dê exemplo em que $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$.
8. Decidir se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, provando ou dando um contra-exemplo:
- $A \subset \mathbb{R}^n$ denso em $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \overline{A} = \mathbb{R}^n$;
 - $A, B \subset \mathbb{R}^n$ densos em $\mathbb{R}^n \Rightarrow A \cap B$ denso em \mathbb{R}^n .
9. Se $F \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é fechado, mostre que F é fechado de \mathbb{R}^n e G é fechado de \mathbb{R}^m .
10. Mostre que se $K \subset A \subset \mathbb{R}^n$, K compacto e A aberto então existe K_1 compacto tal que $K \subset \overset{\circ}{K_1} \subset K_1 \subset A$.
11. Seja $D = \{x \in [0, 1] : \text{a representação decimal de } x \text{ só tem os dígitos 4 e 7}\}$. Este conjunto é aberto? É fechado? É enumerável? Determine $\overset{\circ}{D}$ e \overline{D} .
12. Mostre que toda cobertura de $D \subset \mathbb{R}^n$ por abertos admite subcobertura finita ou enumerável.
13. Dados $E \subset A \subset \mathbb{R}^n$, A aberto, mostre que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ com $\overline{E_n}$ compactos, $\overline{E_n} \subset A$.
14. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, mostre que
- todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K ;
 - toda sequência de K admite subsequência convergente em K .
15. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ infinito não enumerável. Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_n(0)$ tem infinitos pontos de S . Conclua que S tem ponto de acumulação.
16. Sejam $K_i \neq \emptyset$ compactos de \mathbb{R}^n tais que $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$. Mostrar que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$.

17. Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, f nula em $A \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$ ponto de acumulação de A , tais que $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \notin A}} f(x) = 0$. Mostre que $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in \mathbb{R}^n}} f(x) = 0$.
18. Construa $D \subset [0, 1]^2$ tal que $\partial D = [0, 1]^2$ e que contém no máximo um ponto em cada vertical e em cada horizontal.
19. Dê exemplos de abertos A e B de \mathbb{R}^2 , disjuntos, não vazios, conexos e limitados com $\partial A = \partial B$.
20. Dada $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, defina $\|L\|_1 = \sup\{|Lx|: |x| \leq 1\}$ e $\|L\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ em que (a_{ij}) é a matriz de L na base canônica. Mostre que
- $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são normas em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.
 - $\|L\|_1 \leq \|L\| \leq \sqrt{n}\|L\|_1$.
 - $\|L \circ T\| \leq \|L\|\|T\|$ e $\|L \circ T\|_1 \leq \|L\|_1\|T\|_1$, $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear.
21. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x = 0$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre:
- f é contínua em \mathbb{R} ;
 - existe uma constante a tal que $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
22. Estude a continuidade, justificando:
- $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} \|x\|^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
 - $f(x, y) = \theta$, sendo $(x, y) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
 - $f(x, y) = \frac{\rho}{\theta}$, sendo $(x, y) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$.
 - $f(x, y) = x|y|$
 - $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2(y-1)}{5x^4 + (y-1)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 1); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
 - $\sup\{f, g\}$, com $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas.
23. Calcular $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ se existirem:
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 - $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad f(x,y) &= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ y, & \text{se } x = 0 \end{cases} \\
 \text{(d)} \quad f(x,y) &= \begin{cases} (x+y) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{y}, & \text{se } xy \neq 0 \\ 0, & \text{se } xy = 0 \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad f(x,y) &= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}, & \text{se } \operatorname{tg} x \neq \operatorname{tg} y \\ \cos^3 x, & \text{se } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \end{cases}
 \end{aligned}$$

24. É possível definir cada função em $(0,0)$ de modo que fique contínua nesse ponto?

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x,y) &= \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}; \\
 \text{(b)} \quad f(x,y) &= \frac{xy^2 + x^2 \operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 y^4 + 5); \\
 \text{(c)} \quad f(x,y) &= \frac{x^5 y^{10}}{x^{15} - y^{15}}; \\
 \text{(d)} \quad f(x,y) &= \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2}; \\
 \text{(e)} \quad f(x,y) &= \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}; \\
 \text{(f)} \quad f(x,y) &= \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}; \\
 \text{(g)} \quad f(x,y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^6}.
 \end{aligned}$$

25. Seja $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ monótona. Mostre que existem $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ para $p \in]a, b[$ e conclua que o conjunto das descontinuidades de f é, no máximo, enumerável.

26. Sejam $F = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^*\}$ e $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$. Mostre que F é fechado de \mathbb{R}^2 mas $\pi(F)$ não é fechado de \mathbb{R} .

27. Mostre:

- (a) $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ contínua $\Rightarrow f$ tem ponto fixo.
 (b) $f: [a, b[\rightarrow [a, b[$ contínua e sobrejetora $\Rightarrow f$ tem ponto fixo.

28. Mostre:

- (a) A função $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
 (b) $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ é aberto.
 (c) A função que, a cada $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversível, associa a sua inversa A^{-1} é contínua.

- (d) $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear injetora \Rightarrow existe $c > 0$ tal que $\|Lx\| \geq c\|x\|$, para todo x .
29. Sejam $\varphi, \psi: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em K compacto tais que $\varphi(x) \leq \psi(x)$, para todo $x \in K$. Mostre que $S = \{(x, y) : x \in K, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ é compacto.
30. Mostre que $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ é denso em $M_n(\mathbb{R})$ e desconexo.
31. Dados $p \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $q \in \mathbb{R}^n \setminus D$, mostre que $\overline{pq} \cap \partial D \neq \emptyset$.
32. Mostre que
- $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo (compacto) e $p \in \mathbb{R}^n \Rightarrow p + E$ conexo (compacto).
 - $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto (fechado) e $p \in \mathbb{R}^n \Rightarrow p + E$ aberto (fechado).
 - S subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n \Rightarrow S$ é fechado e conexo.
 - Não existe $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua injetora.
33. Seja $f: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que K é compacto. Mostre que f é contínua em K se, e somente se, graf f é compacto.
34. Mostrar que o conjunto $E = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \text{sen } \frac{1}{x}) : x \in]0, \infty[\}$ não é conexo por caminhos.
35. Mostre que:
- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ contínua, $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos $\Rightarrow f(E)$ é conexo por caminhos.
 - $E_1 \subset \mathbb{R}^n, E_2 \subset \mathbb{R}^k$ conexos por caminhos $\Rightarrow E_1 \times E_2$ é conexo por caminhos.
 - $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos $\not\Rightarrow \overline{E}$ conexo por caminhos.
 - $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo $\Rightarrow \overline{E}$ conexo.
 - $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ conexos com $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \Rightarrow E_1 \cup E_2$ conexo.
 - $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ conexos $\Rightarrow E_1 \times E_2$ conexo.
36. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $f(x, 0) = 0$, para todo x . Mostre que existe $r > 0$ tal que $|f(x, y)| < \frac{1}{4}$, para todo $(x, y) \in [0, 1] \times [-r, r]$.
37. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que se anula em S^1 . Mostre que existe $0 < r < \frac{1}{4}$ tal que $1 - r < \|(x, y)\| < 1 + r \Rightarrow |f(x, y)| < \frac{1}{6}$.
38. Mostre que $f(x) = \text{sen } \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua em $]0, 1]$ e, sem usar derivada, que é uniformemente contínua em $[1, \infty[$.
39. Se $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, mostre que existem constantes $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| \leq ax + b$, para todo $x \geq 0$.

40. Sejam $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uniformemente contínua e $p \in \mathbb{R}^n$ ponto de acumulação de D . Mostre que existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ e conclua que f pode ser estendida continuamente para a fronteira de D .
41. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, mostre que f é integrável em $[a, b]$.
42. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para toda curva $\gamma:]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua com $\gamma(0) = (0, 0)$, tem-se $(f \circ \gamma)(t)$ contínua em $t = 0$. Pergunta-se: f é contínua em $(0, 0)$?
43. Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ crescente (estritamente) e $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Mostre que $\sum_{i=1}^n o(f, x_i) \leq f(b) - f(a)$ $\left(\sum_{i=1}^n o(f, x_i) < f(b) - f(a) \right)$.
44. Mostre que a função $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é de classe C^∞ .
45. Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pergunta-se (i) Para que $u \in \mathbb{R}^2$, existe $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$? Calcule. (ii) Existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$? (iii) f é diferenciável em $(0, 0)$? (iv) f é contínua em $(0, 0)$?
- (a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
- (b) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (y - x)^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
46. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável em p . Existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{\|h\|}$?
47. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Prove que a função

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, & \text{se } x \neq y; \\ f'(x), & \text{se } x = y \end{cases}$$

é diferenciável se $x \neq y$ e, se existir $f''(x)$, então F é diferenciável em \mathbb{R}^2 .

48. Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ usando a definição de derivada direcional e interprete geometricamente:
- (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2, -x^2 - y^2)$;
- (b) $f(x, y) = (x + y, xy)$;
- (c) $f(x, y) = (x^2 y^2, xy)$.
49. (a) Suponha que $v \neq 0$ e que exista $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$. Mostre que, para todo $t \in \mathbb{R}$, também existe $\frac{\partial f}{\partial tv}(p)$ e $\frac{\partial f}{\partial tv}(p) = t \frac{\partial f}{\partial v}(p)$;

- (b) Encontre exemplos em que existem $\frac{\partial f}{\partial(u+v)}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ com $\frac{\partial f}{\partial(u+v)}(p) \neq \frac{\partial f}{\partial u}(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.
50. Sejam $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ e $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.
Mostre que $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot u$. Explique.
51. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável e $F(x, y) = f(3x - y)$.
- Calcule $\frac{\partial F}{\partial(h, k)}(x_0, y_0)$ usando a definição de derivada direcional.
 - Mostre que F é diferenciável em (x_0, y_0) usando a parte anterior. Explícite $dF(x_0, y_0)$.
 - Calcule $dF(x_0, y_0) \left((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0) \right)$ para $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4$.
 - Calcule $dF(x_0, x_0)(x_0, 5x_0)$, no caso em que $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3$ e $x_0 = (1, 2, 3)$.
52. Estude a diferenciabilidade explicitando $dF(p)$ e sua matriz:
- $F(x) = (x, f(x))$, sendo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável.
 - $F(x, y) = (x, f(y))$, sendo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável e $x \in \mathbb{R}^m$.
 - $F(x) = x \cdot x_0$, com $x_0, x \in \mathbb{R}^n$.
 - $F(x) = x \cdot Lx$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $L \in L(\mathbb{R}^n)$.
 - $F(x, y) = f(x) + g(y)$, em que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ são diferenciáveis.
53. Mostre que $f(X) = X^2 + X^3$, $X \in M_n(\mathbb{R})$, é diferenciável e explícite $df(X_0)(H)$.
54. Considere $A \in M_3(\mathbb{R})$ como elemento de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, em que cada linha $a_i \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $\det: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e explícite $(\det)'(A)(I)$.
55. Estude a diferenciabilidade de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x, y) = |x| + |y|$
 - $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$
 - $f(x, y) = |xy|$
 - $f(x, y) = \sup\{|x|, |y|\}$.
56. Dada $f(t) = \begin{cases} \left(t^2 \cos \frac{1}{t}, t^2 \sin \frac{1}{t} \right), & \text{se } t \neq 0; \\ (0, 0), & \text{caso contrário} \end{cases}$

- (a) Verifique que f é diferenciável.
 (b) Verifique que $f'(\mathbb{R})$ não é conexo.
 (c) Conclua que não vale um Teorema do Valor Intermediário para derivadas de funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.
57. Dê o maior subconjunto de \mathbb{R}^2 em que f é de classe C^1 mas não é de classe C^2 .
 (a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$;
 (b) $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^4}$.
58. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ de classe C^1 no aberto A . Mostre que o conjunto $\{x \in A: f'(x) \text{ é injetora}\}$ é um aberto.
59. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável e $f(tx) = tf(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostre que f é linear.
60. Mostre que $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$ não é diferenciável em $(0, 0)$, mas $f \circ \gamma$ é diferenciável em $t = 0$, qualquer que seja a curva $\gamma:]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = 0$, derivável em $t = 0$.
61. Seja $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ bilinear. Mostre que
 (a) $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.
 (b) f é diferenciável em (x_0, y_0) ; explicita $df(x_0, y_0)(h, k)$.
62. Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, para todo x, y e M constante, mostre que $\left\| \frac{\partial f}{\partial v}(p) \right\| \leq M\|v\|$, para todo $p, v \in \mathbb{R}^m$.
63. Seja $F = (f, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 . Mostre que a aplicação definida por $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto dF(x, y) \in L(\mathbb{R}^2)$ ($L(\mathbb{R}^2)$ é identificado com M_2 ou \mathbb{R}^4) é diferenciável e explicita $d(dF)(x_0, y_0) = d^2F(x_0, y_0)$.
64. Usando a Regra da Cadeia,
 (a) Mostre que $\omega(t)$ é diferenciável, explicitando $d\omega(t)$, no caso em que $\omega = F(x, y, t)$, com $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $F(x, y, z)$ reais e diferenciáveis.
 (b) Idem para a função $\omega = \omega(x, y, z)$, com $\omega = f(x, u, v)$, $u = u(x, y)$ e $v = v(y, z)$ reais e diferenciáveis.
 (c) Idem para a função $F(x, y, z) = f(g(x+y), h(y+z))$, em que $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis.
65. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que
 (a) $F(x) = f(x).f(x)$ é diferenciável, explicitando $dF(x_0)(h)$;
 (b) $\|f(x)\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \det f'(x) = 0$.

- (c) Interprete geometricamente o item (b).
66. Verificar se as funções dadas são lipschitzianas no domínio dado e, em caso afirmativo, dar uma constante de Lipschitz.
- (a) $f(x, y) = (3x^2y, x^2 - y^4)$ em $[2, 5] \times [1, 2]$ e em \mathbb{R}^2 ;
- (b) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ em $[0, 1]$ e em \mathbb{R}^+ ;
- (c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ em $[0, 1]$.
67. Verifique se $M = \sqrt{100}$ pode ser constante de Lipschitz para $f(x, y) = (3x^2y^2, x^3 - y^3)$ em $[0, 1]^2$.
68. Mostre que se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$, vale $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$, então f é constante.
69. (a) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com A aberto convexo e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in A$. Mostre que $f(x, y) = g(x)$ em A .
- (b) Se $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em \mathbb{R}^2 , mostre que f é constante.
70. Seja $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$.
- (a) Mostre que se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em A então f é constante.
- (b) Encontre $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ com $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ em A , mas f não é independente de y .
71. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 com $f(0) = 0$. Mostre que existem funções contínuas $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$, $\forall x$.
- (Sugestão: $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx) dt$)
72. Estude a diferenciabilidade de $F(x, y) = A(x)y$, em que $A: \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ é diferenciável.
73. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais limitadas. Mostre que f é contínua.
74. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com $\nabla f(u) \cdot u > 0$, para todo u tal que $\|u\| = 1$. Mostre que existe p , $\|p\| < 1$ tal que $Df(p) = 0$.
75. Seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^m$ com $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)}{2}$, para todo x . Mostre que f é linear.
76. Seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f'(x) \cdot x = 0$. Prove que a função $g(x) = f(2x) - f(x)$ é limitada.

77. Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e a é ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$, mostre que $f'(a)$ não é injetora.
78. Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^2 e $f(tx) = t^2 f(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^m$, mostre que existe uma aplicação bilinear $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = B(x, x)$.
79. $\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$ é localmente injetora em $(1, 1)$? e em $(0, 0)$? Por quê?
80. $\begin{cases} u = \sin x \cos y - \sin y \cos x \\ v = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{cases}$ é localmente injetora? Por quê?
81. Sejam $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis com h difeomorfismo tais que $f = h^{-1}gh$. Se p_0 é ponto fixo de f , mostre que $h(p_0)$ é ponto fixo de g e que $f'(p_0)$ e $g'(h(p_0))$ têm os mesmos autovalores.
82. (a) Mostre que uma raiz p de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, é isolada se $df(p)$ não tem autovalor nulo.
 (b) Mostre que um ponto fixo p de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, é isolado se $df(p)$ não tem autovalor $\lambda = 1$.
83. Mostre que
 (a) se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é difeomorfismo local em cada ponto então f é aberta
 (b) se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local em cada ponto então $f^{-1}(0)$ é finito ou é enumerável ilimitado.
84. Sejam $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ contínua, $A = \{(x, y): 0 < x < y\}$ e

$$f(x, y) = \left(\int_0^{x+y} g(t) dt, \int_0^{x^2+y^2} g(t) dt \right)$$

definida em A . Mostre que f é um difeomorfismo de A sobre um aberto de \mathbb{R}^2 .

85. Idem para $f(x, y) = \left(\int_0^{x-y} g(t) dt, \int_0^{x^2-y^2} g(t) dt \right)$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < y < x\}$.
86. Dada uma função $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, suponha que existam n funções de classe C^1 , $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $g_1 \circ f, \dots, g_n \circ f$ sejam de classe C^1 . Mostre que se $\nabla g_1(f(x)), \dots, \nabla g_n(f(x))$ são linearmente independentes, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, então, f é de classe C^1 .

87. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , $\|f'(x)\|_1 \leq c < 1$, para todo x , mostre que $g(x) = x + f(x)$ é sobrejetora.
88. Mostre que $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$ é um difeomorfismo sobre \mathbb{R}^2 se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 com $|f'(t)| \leq \lambda < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
89. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f'(f(x)) \circ f'(x) = I$, para todo x e $f \circ f(x_0) = x_0$, para algum x_0 . Mostre que f tem inversa e que $f^{-1} = f$.
90. Para cada constante $c \in \mathbb{R}$, a reta $\begin{cases} z = y - x \\ y = (1 - c)x + c \end{cases}$ e a superfície $z = x^2 - y^2$ interceptam-se em $p = (1, 1, 0)$. Mostre que p é ponto isolado da intersecção da reta com a superfície, se $c \neq 0$, usando o Teorema da Função Inversa.
91. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma contração. Mostre que $I + f$ é uma aplicação aberta.
92. Mostre que $f(x, y) = (\sin x^3 \cosh y, \cos x^3 \sinh y)$ é localmente injetora em $(0, 0)$. Sua inversa é diferenciável nesse ponto?
93. Seja $F: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ e $G(x, y) = (F(F(x, y), y), F(x, y))$. Dê condições sobre F para que G seja um difeomorfismo local e calcule JG^{-1} nesse caso.
94. Seja $f: \bar{B}_r(0) \rightarrow \bar{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$, com λ constante, $0 \leq \lambda \leq 1$. Mostre:
 (a) $f_n = \frac{n-1}{n}f$ é contração, para todo $n \geq 1$.
 (b) f tem ponto fixo? Único?
95. Verificar se $x^3 + xy^2 + y^3 = 1$ pode ser dada localmente no ponto $(1, 0)$ por $x = x(y)$. E por $y = y(x)$? Determine a reta tangente em $(1, 0)$.
96. Dada a equação $g(x) - \int_0^y e^{t^2} dt = 0$, com $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y = y(x)$ que resolve a equação e que essa função é C^∞ .
97. Pode $xye^{xz} - z \ln y = 0$ ser resolvida localmente no ponto $(0, 1, 0)$ como $z = z(x, y)$? e $x = x(y, z)$? e $y = y(x, z)$? Determine o plano tangente em $(0, 1, 0)$.
98. Seja $f(x, y) = \frac{\sin xy^2}{xy}$, se $xy \neq 0$, $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$. Estude a existência e a unicidade de solução de classe C^1 , $y = y(x)$, para a equação $f(x, y) = 0$, localmente em $(0, 0)$.

99. Dada $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$, encontre
- os 4 pontos tais que $\nabla f = 0$;
 - os pontos da curva $f(x, y) = 0$ para os quais a equação não pode ser resolvida unicamente por $y = y(x)$ nem por $x = x(y)$.
100. Dê condições sobre $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 com $f(2, -1) = -1$, para que a curva $\gamma: \begin{cases} f(x, y) + z^2 = 0 \\ xz + 3y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$ possa ser resolvida por $x=x(y)$, $z=z(y)$, de classe C^1 , localmente em $(2, -1, 1)$. Dê a reta tangente à γ em $(2, -1, 1)$ supondo $f'(2, -1) = (1 \ -3)$. Calcule $z'(-1)$ e $x'(-1)$.
101. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $z \in \mathbb{R}$, considere $f(z) = ze^{xy} + z^3(x^2 + y^2) - 1$. Mostre que
- f é estritamente crescente,
 - existe um único $z = z(x, y)$ tal que $f(z) = 0$,
 - $z(x, y)$ é de classe C^∞ e determine suas derivadas parciais de segunda ordem em $(0, 0)$.
102. Verifique se $x^y = y^x$, para $x, y > 1$, pode ser resolvida unicamente por $y = y(x)$.
103. Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $F(0, 0) = 0$, $F'(0, 0) = (2 \ 3)$.
- Mostre que a superfície $F(x + 2y + 3z - 1, x^3 + y^2 - z^2) = 0$ pode ser dada localmente em $(-2, 3, -1)$ como gráfico de $z=z(x, y)$ de classe C^2 .
 - Calcule $\frac{\partial z}{\partial y}(-2, 3)$.
 - Sabendo-se que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = 3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0, 0) = 5$, calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2, 3)$.
104. Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 , $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$ tal que $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$. Enuncie e prove um resultado que garanta a existência e unicidade de ponto fixo próximo de x_0 para f_λ com $\lambda \sim \lambda_0$.
105. Seja $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, x - y - a)$. Para que valores de a , $(0, 0)$ é valor regular de f ?
106. Seja c um valor regular de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n > 1$, de classe C^1 . Mostre que se q é o ponto de $f^{-1}(c)$ mais próximo de um ponto fixado $p \notin f^{-1}(c)$, então, $p - q$ é ortogonal ao plano tangente a $f^{-1}(c)$ em q .

107. Se $M = \{(x, a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0\}$, prove:

(a) M é superfície de dimensão n e classe C^∞ de \mathbb{R}^{n+1} ;

(b) a restrição da projeção $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\pi(x, a_0, \dots, a_{n-1}) = (x, a_1, \dots, a_{n-1})$$

à superfície M é um homeomorfismo sobre \mathbb{R}^n cuja inversa é imersão de classe C^∞ .

108. Seja $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, contínua, tal que $\int_0^1 f = \int_1^2 f = 1$. Para cada $x \in [0, 1]$, considere $g(x)$ dada por $\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1$. Prove que g está bem definida e é de classe C^1 .

109. (a) Seja $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \text{posto } A = 1\}$. Mostre que, localmente em cada ponto, S é o gráfico de uma função real de classe C^1 . Determine o plano tangente em $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0$.

(b) Como é o análogo para

$$S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \text{posto } A = 2\} \text{ e } A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

110. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \neq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que cada subconjunto limitado de \mathbb{R}^2 encontra apenas um número finito de componentes conexas de $f^{-1}(0)$.

111. Seja $f: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^1 , $k, n \geq 1$, com $f'(p_0)$ de posto máximo e $f(p_0) = c_0$. Prove que existem abertos $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ contendo p_0 e $V \subset \mathbb{R}^k$ contendo c_0 tais que, para todo $c \in V$, $f^{-1}(c) \cap U$ é gráfico de função de classe C^1 de n variáveis e k componentes com o mesmo domínio.

112. Determine o paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados inscrito no elipsóide $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ de maior volume possível.

113. Determine os extremos absolutos de $g(x, y, z) = xyz$ condicionada à curva

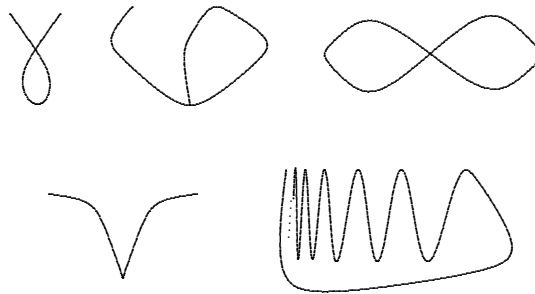
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

114. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável não constante. Dado $\varepsilon > 0$, mostre que existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|p\| = \varepsilon$ e $p \perp \nabla f(p)$.

115. (a) Seja $L \in L(\mathbb{R}^n)$ simétrica. Mostre que os extremos da função $f(x) = L(x) \cdot x$ condicionada à esfera S^{n-1} são autovetores de L e os valores extremos são os autovalores correspondentes.
- (b) Conclua que o valor máximo e o valor mínimo da função dada por $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ são os autovalores da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
116. Seja $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 , $m \leq n$, tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $F_t(x) = F(x, t)$ tem derivada de posto máximo, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Mostre que a função $G(x, t) = (F(x, t), t)$ tem posto máximo, para todo ponto $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.
117. Mostre que o gráfico de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, de classe C^1 é imagem inversa de valor regular e é imagem de imersão de classe C^1 .
118. Dada $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 1$, determine seus valores regulares $c \in \mathbb{R}$ e descreva os conjuntos $f^{-1}(c)$.
119. Seja $SL(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$.
- (a) Mostre que $SL(3)$ é superfície de $M_3(\mathbb{R})$, dando sua dimensão.
- (b) Determine o plano tangente a $SL(3)$ na identidade I .
120. Dada $f(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - z^2 + t^2, t^2)$, determine os valores regulares (a, b) de f e descreva os conjuntos $f^{-1}(a, b)$.
121. (a) Determine os extremos de $f(x, y) = x \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, em $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$.
- (b) Use (a) para provar a desigualdade de Cauchy Schwarz em \mathbb{R}^n .
122. Mostre que a imagem inversa de um valor regular de $f \in C^1$, localmente em cada ponto, é a imagem de uma imersão de classe C^1 . Reciprocamente, a imagem de uma imersão de classe C^1 , localmente em cada ponto, é a imagem inversa de valor regular?
123. Seja $0 \in \mathbb{R}$ valor regular de $f: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $f(a) = 0$, $\gamma:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ derivável com $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0)$ não pertencente ao plano tangente à superfície $f = 0$ em a . Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(\gamma(t))$ não se anula e tem sinais distintos em $]-\delta, 0[$ e em $]0, \delta[$, respectivamente. Interprete geometricamente.
124. Seja $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , isto é, de classe C^1 em um aberto contendo $[a, b]$, $0 < a < b$. Mostre que a superfície obtida pela rotação do

gráfico de $z = \varphi(x)$ em torno do eixo z é imagem de uma imersão de classe C^1 e imagem inversa de valor regular.

125. Dadas M e N superfícies de classe C^1 e dimensões k e l , respectivamente, prove que $M \times N$ é uma superfície de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, dando sua dimensão, classe e o plano tangente num de seus pontos.
126. Sejam $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ imersão de classe C^1 e $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismo de classe C^1 . Mostre que $\sigma \circ F$ é imersão de classe C^1 .
127. As curvas



podem ser imagem de imersão injetora de classe C^1 de \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 ? E imagem inversa de valor regular?

128. Seja $f: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0)$ com posto máximo. Mostre que a equação $f(x) = c$ tem solução, para todo c suficientemente próximo de 0.
129. Sejam $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ imersões C^1 . Mostre que

$$\varphi \times \psi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$$

é imersão C^1 . Conclua que o toro $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ é imagem de imersão C^1 de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^4 .

130. Mostre que se $f: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é submersão de classe C^1 , então f é aberta.
131. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2, x_1^2 - (x_2^2 + \dots + x_n^2))$. Determine os subconjuntos de \mathbb{R}^n em que o posto de f é constante.
132. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 e os conjuntos

$$A_r = \text{int} \{x \in A: \text{posto } f'(x) = r\},$$

para $r = 0, 1, \dots, p = \min\{m, n\}$. Mostre que $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_p$ é denso em A . Verifique no caso $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2, x_1^2 - (x_2^2 + \dots + x_n^2))$.

133. Seja $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ submersão de classe C^1 com $f(x) \neq 0$, para todo x . Mostre que $\|f(x)\|$ não tem extremos.
134. Sejam $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão de classe C^1 injetora com inversa contínua e $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 , com $\gamma(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathbb{R}^2)$. Mostre que existe uma curva C^1 $\alpha:]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$, tal que $\gamma = \sigma \circ \alpha$ em $]-\delta, \delta[$. Dê contra-exemplo para o caso em que σ^{-1} não é contínua.
135. Considere $f(X) = XX^t$, $X \in M_n(\mathbb{R})$ como aplicação de \mathbb{R}^{n^2} em $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, levando em conta que XX^t é simétrica.
- Calcule $\frac{\partial f}{\partial H}$ e mostre que f é diferenciável em X .
 - Suponha que A seja ortogonal, isto é, $AA^t = I$. Mostre que a aplicação $f'(A) \in L(\mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}})$ é sobrejetora.
 - Mostre que $f \in C^1$.
 - Conclua que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ ortogonal}\}$ é uma superfície de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.
 - Mostre que o plano tangente a $O(n)$ em I é o conjunto $I + \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$.
 - Mostre que $O(n)$ é compacto.

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T.M. *Análisis Matemático*. Barcelona: REVERTÉ, 1960.
- [2] BUCK, R.C. *Advanced Calculus*. 3 ed. New Nork: MC GRAW-HILL, 1978.
- [3] GUIDORIZZI, H. *Um curso de Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [4] LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1975.
- [5] LIMA, E.L. *Curso de Análise*, vol 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1976 (Projeto Euclides).
- [6] LIMA, E.L. *Curso de Análise*, vol 2. Rio de Janeiro: IMPA, 1981 (Projeto Euclides).
- [7] SPIVAK, M. *Calculus on Manifolds*. New York: W.A. BENJAMIN, 1965.
- [8] MUNKRES, J.R. *Analysis on Manifolds*. Redwood: ADDISON-WESLEY, 1991.
- [9] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3 ed. New York: MC GRAW-HILL, 1976.
- [10] FLORY, G. *Exercices de Topologie e d'Analyse*. Paris: VAUBERT, 1976.

Índice Remissivo

- bola
 - aberta, 9
 - fechada, 9
- conjunto
 - conexo, 13
 - por caminhos, 20
 - contração, 46
- derivada
 - direcional, 29
 - parcial, 29
- desigualdade de Cauchy Schwarz, 71
- difeomorfismo, 45
- diferencial, 26
- distância
 - de ponto a conjunto, 22
- função
 - aberta, 43, 44
 - contínua, 15
 - de classe C^1 , 37
 - de classe C^2 , 39
 - diferenciável em um ponto, 25
 - lipschitziana, 15
 - uniformemente contínua, 22
- imagem inversa de um conjunto, 18
- imersão, 62
- limite
 - de uma função em um ponto, 15
- Multiplicadores de Lagrange, 60
- oscilação, 24
- plano tangente, 26, 53, 58, 59
- ponto
 - de acumulação, 9
 - de aderência, 9
 - de fronteira, 9
 - interior, 9
 - isolado, 15
- Regra da Cadeia, 33
- reta tangente, 55
- subconjunto
 - aberto, 9, 13
 - compacto, 11
 - fechado, 9, 13
- submersão, 65
- superfície, 58, 59
 - regular, 58, 59
- Teorema
 - da Função Implícita, 55
 - da Função Inversa, 44
 - da Imersão, 64
 - da Perturbação da Identidade, 47
 - da Submersão, 66
 - de Heine Borel, 11
 - de Weierstrass, 21
 - do Ponto Fixo de Banach, 46
 - do Posto, 68
 - do Valor Intermediário, 19
 - do Valor Médio, 40
- valor regular, 58

vizinhança aberta, 37