Projeto de Pesquisa

Álgebras de Lie, grupos quânticos, loops analíticos e algébricos e suas representações.

Período: 01/03/2003 a 28/02/2005.

Alexandre Grishkov

1 Introdução.

No período entre 01/03/2003 e 28/02/2005 pretendo continuar trabalhando nas seguintes direções principais:

1. Álgebras de Lie, grupos algébricos e quânticos e suas representações.
2. Loops analíticos e algébricos de Moufang e alternativos.
3. Grupos e lgebras com trialidade e suas representaes.

Na primeira direção, espero obter resultados significativos

a) sobre a Conjectura de B.Kostant [16] em colaboração com professor Futorny V. (IME-USP).

Conjectura 1 *Sejam L uma álgebra de Lie semisimples de dimensão finita sobre o corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos, V, W L-módulos irredutíveis e $dim_{\mathbf{C}} W < \infty$.*

Então o módulo $V \otimes W$ tem comprimento finito. Isso significa que existe uma cadeia finita de submódulos

$$V \otimes W = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset ... \supset U_n = 0,$$

tal que U_i/U_{i+1} é um módulo irredutível, $i = 1, ..., n-1$.

Conjectura 1 està em aberto mesmo no caso mais simples, quando $L \simeq sl_2(\mathbf{C})$, apesar de existência de classificação dos módulos irredutíveis sobre $sl_2(\mathbf{C})$, obtida por R.Block [1].

b) sobre a estrutura e representações das p-álgebras de Lie simples em colaboração com os professores A.Premet (Universidade de Manchester, Inglaterra), A.Zubkov (Universidade Federal de Omsk, Rússia) e M.Guerreiro (Universidade Federal de Viçosa, MG). Em particular, em colaboração com a professora M.Guerreiro vamos trabalhar sobre a seguinte conjectura.

Conjectura 2 *Seja $S = M_2(k)$ a álgebra de matrizes 2×2 sobre um corpo k de característica 2 e V o S-módulo irredutível de dimensão 2. Seja L uma álgebra simples de dimensão finita sobre k contém a subálgebra S e L, como S-módulo, tem decomposição $L = S \oplus U \oplus A$, onde $AS = 0$, U é uma soma direta de submódulos $U_1, ..., n$ e $U_i \simeq V, i = 1, ..., n$*

Então L é a álgebra de Lie clássica de tipo B_{2l}, D_l, E_7 ou E_8.

Na segunda direção vou tentar resolver (pelo menos parcialmente) os problemas 2,3 e 4. Em particular,

a) em colaboração com o professor I.Chestakov (IME-USP) vamos continuar trabalho sobre as conjecturas 8 e 7.

b) espero obter resultados afirmativos sobre as conjecturas 6,9 e 10.

c) continuar trabalhos sobre as conjecturas 3 e 5.

Alèm disso, em colaboração com professores H.Guzzo e J.Gutiérrez (IME-USP) vamos continuar estudos das álgebras de Bernstein iniciados em [11] e [10]. Em particular, provar a seguinte conjectura.

Conjectura 3 *Seja A uma álgebra de Bernstein de dimensão finita. Então o radical* $\mathrm{R}(A)$ *é um ideal fortemente nilpotente maximal.*

2 Loops analíticos locais.

Em 1955, Malcev publicou o primero artigo [17] sobre loops analíticos alternativos e loops de Moufang. Lembramos que um loop G é alternativo (A-loop) ou diassociativo se um subloop gerado por dois elementos de G é um subgrupo. Um loop G é de Moufang (M-loop) se G satisfaz a seguinte identidade: $(xy)z \cdot x = x \cdot y(zx)$. Ele mostrou que um espaço tangente de um A-loop analíitico G (AA-loop) possui a estrutura de uma álgebra na qual cada dois elementos geram uma subálgebra de Lie (BL-álgebra). Notemos que cada loop de Moufang é alternativo [18]. Malcev mostrou que se um AA-loop é de Moufang então a BL-álgebra correspondente satisfaz a seguinte identidade:

$$(xy)z \cdot x + (yz)x \cdot x + (zx)x \cdot y = xz \cdot yx. \ (\star)$$

Agora álgebras anticomutativas com identidade $(\star)$ se chamam álgebras de Malcev (M-álgebras). Notemos que as teorias das álgebras de Malcev e BL-algebras são equivalentes às teorias dos loops analíticos locais de Moufang e alternativos correspondente. A teoria de M-álgebras desenvolveu-se nos últimos 30 anos e, no presente momento,quase todos os teoremas importantes para álgebras de Lie já foram provados para Málgebras.

Em caso de BL-álgebras, a situação é mais difícil. Em [3] nós provamos o seguinte teorema:

Teorema 1 *[3] Seja B uma BL-álgebra de dimensão finita sobre um corpo k de característica 0 e G é o radical solúvel de A. Então B contém uma subálgera P e um ideal central $R(B)$ tais que $B = P + G$, $P = \tilde{K} \oplus L$, onde L é uma subálgebra de Lie semisimples, $\tilde{K}/R(B) = K_1 \oplus ... \oplus K_n, K_1, ..., K_n$ são as álgebras de Malcev simples de dimensão 7 e $\tilde{K}$ é não decomponível.*

Além disso, se V é um B-módulo de dimensão finita, então $R(B)V = 0$.

O ideal $R(B)$ na BL-álgebra B se chama um B-radical e dizemos que B é B-semisimples se $R(B) = 0$.

Teorema 2 *[4] As BL-álgebras B-semisimples perfeitas de dimensão finita sobre um corpo k de característica 0 são as álgebras de Malcev.*

Pois bem, na teoria de BL-álgebras aparece um fato novo. Cada BL-álgebra perfeita tem um B-radical que actua como zero em cada módulo. Mas se, em uma BL-álgebra B, um B-radical não é zero então os teoremas sobre ""splitting" radical solúvel e a conjugação dos fatores de Levi não são verdadeiros. Mais precisamente:

1.Existe uma BL-álgebra na qual o radical solúvel não é ""splitting", por exemplo: $B = K \oplus_\phi V$, onde K/V é uma soma direta das M-álgebras simples de dimensão 7, V é um ideal central e poducto em B é como segue:

$$(a + v)(b + w) = ab + \phi(a, b); a, b \in K; \phi(a, b) = -\phi(b, a) \in V,$$

onde ϕ é uma aplicação bilinear não nula. Notemos que $R(B) = V$.

Este exemplo não é tão particular, como podemos ver no seguinte teorema [4]:

Teorema 3 *Uma BL-álgebra B de dimensão finita sobre um corpo k de característica 0 não contém subálgera P semisimples tal que $B = P \oplus G$, onde G é o radical solúvel de B, se, e somente se, B contém uma subálgebra do tipo $K \oplus_\phi V$, com aplicação ϕ não nula.*

Por isso é muito importante resolver o seguinte problema:

Problema 1 *Quando duas BL-algebras $K \oplus_\phi V$ e $K \oplus_\psi W$ são isomorfas?*

2. Existe uma BL-álgebra B tal que $B = P \oplus G$, onde P é uma subálgebra semisimples (fator de Levi), G é o radical solúvel de B (por isso o radical solúvel é "splitting"). Mas, em B, existe outra subálgebra semisimples P_1 que é isomorfa á álgebra P, mas não existe um automorfismo ϕ da álgebra B tal que $P^\phi = P_1$ (veja exemplo na página 332 [4]). Notemos que neste exemplo a causa pela qual não existe um automorfismo ϕ é bastante evidente: B como P-módulo não é isomorfa a B como P_1-módulo. Por isso tem razão de ser a seguinte

Conjectura 4 *Dois factores de Levi P_1 e P_2 numa BL-álgebra B são conjugados se, e somente se, B como P_1-módulo é isomorfa a si mesma como P_2-módulo. Em outras palavras: quando existem um isomorfismo $\phi : P_1 \to P_2$ e uma aplicação linear $\tau : B \to B$ tais que*

$$\tau(pq) = \phi(p)\tau(q), p \in P_1, q \in B;\ ker\tau = 0.$$

3 Loops analíticos globais.

Na teoria dos loops analíticos globais o problema principal é o seguinte.

Problema 2 *Seja G um loop analítico local. Existe ou não um loop analítico global $\tilde{G}$ tal que os loops G e $\tilde{G}$ são isomorfos localmente?*

No caso dos grupos de Lie este problema foi resolvido por Cartan ainda no início do seculo. Para os loops de Moufang, F.Kerdman provou a existência dos loops analíticos globais para todos loops de Moufang locais [15]. Mas para os loops alternativos a situação é mais difícil. Seja B uma BL-álgebra de dimensão finita sobre o corpo $\mathbf{R}$ dos números reais. Denotamos por $B(a,b)$ uma subálgebra de B gerada por $a, b \in B$ e por $G(a,b)$ o grupo de Lie simplesmente conexo correspondente à álgebra $B(a,b)$. Definimos uma relação binária $\sim$ em B da seguinte forma: para $a, b \in B$, $a \sim b$, se $exp(a) = exp(b)$. Não é difícil provar que $\sim$ é de equivalência, se existe um loop alternativo analítico global correspontente a B. Por isso temos

Conjectura 5 *Para uma BL-álgebra B de dimensão finita sobre $\mathbf{R}$, existe um loop alternativo analítico global correspondente se, e somente se, $\sim$ é uma relação de equivalência em B.*

O primeiro passo foi feito em [7]:

Teorema 4 *Seja B uma BL-álgebra de dimensão finita sobre $\mathbf{R}$ tal que $\sim$ é a relação de igualdade. Então existe um loop alternativo analítico global correspondente.*

Notemos que em [7] foi construído um exemplo de BL-álgebra tal que $\sim$ não è de equivalência.

4 Aplicação exponencial algébrica e loops algébricos.

A aplicação exponencial clássica de uma álgebra de Lie no grupo de Lie correspondente é uma ferramenta muito importante para a teoria dos loops analíticos alternativos. Por analogia com um grupo algébrico, podemos definir um loop algébrico como uma variedade algébrica com estrutura de loop tal que a multiplicação é uma função racional. Como no caso dos loops analíticos alternativos, o espaço tangente $L(G)$ a um loop algébrico alternativo G possui estrutura de uma BL-álgebra. Os problemas principais da teoria dos loops algébricos alternativos são seguintes.

Problema 3 *Seja B uma BL-álgebra de dimensão finita sobre um corpo k de caracteristica 0. Existe ou não um loop algébrico alternativo local G tal que $L(G) = B$.*

Problema 4 *Seja G um loop algébrico alternativo local. Existe ou não um loop algébrico alternativo global G_1 tal que G e G_1 são loops algébricos localmente isomorfos.*

No caso geral, ambos os problemas tem respostas negativas.

Exemplo 1 *(Grishkov ([6])) Seja $B = B(n,m)$, com $n, m \in \mathbf{Z}$, uma BL-álgebra sobre k, com uma base $\{t, a, b, c\}$ e multiplicação:*

$$at = na, bt = nb, ct = mc, ab = c, ac = bc = 0, n, m \in k.$$

Se $m, n \neq 0, n \neq m$, então o seguinte loop algébrico alternativo local corresponde à álgebra B.

$$G(n,m) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 \neq -1, x_i \in k, i = 1, ..., 4\}.$$

$$(x_1, ..., x_4) \cdot (y_1, ..., y_4) = (\alpha, \beta, \gamma, \tau),$$

onde

$$\alpha = x_1 + y_1 + x_1 y_1,$$

$$\beta = \frac{\alpha y_2}{y_1} + \frac{\alpha[(1+x_1)^n - 1](x_2 y_1 - x_1 y_2)(1+y_1)^n}{x_1 y_1[(1+x_1)^n (1+y_1)^n - 1},$$

$$\gamma = \frac{\alpha y_3}{y_1} + \frac{\alpha[(1+x_1)^n - 1](x_3 y_1 - x_1 y_3)(1+y_1)^n}{x_1 y_1[(1+x_1)^n (1+y_1)^n - 1},$$

$$\tau = \frac{\alpha y_4}{y_1} + \frac{\alpha[(1+x_1)^n - 1](x_2 y_3 - x_3 y_2)(1+y_1)^n}{x_1 y_1[(1+x_1)^n (1+y_1)^n - 1](n-m)} +$$

$$\frac{\alpha[(1+x_1)^m - 1](1+y_1)^m[(n-m)(x_4 y_1 - x_1 y_4) + x_2 y_3 - x_3 y_2]}{x_1 y_1 (n-m)[(1+x_1)^m (1+y_1)^m - 1]}$$

Notemos que estes exemplos foram obtidos com ajuda de um análogo algébrico da aplicação exponential analítica.

Definição 1 *Sejam k um corpo de característica 0, G um k-grupo algébrico solúvel, $L = L(G)$ uma BL-álgebra correspondente. Uma função racional $E : L \to G$ se chama* **aplicação exponencial algébrica** *or* **EA-aplicação** *se*

1. $E(kx)$ é um subgrupo 1-paramétrico aditivo de G, para cada $x \in N(L)$, onde $N(L)$ é o nilradical de G.

2. $E(k^{\star}t)$ é um subgrupo 1-paramétrico multiplicativo de G, se $x \in L$ é semisimples.

É pouco provável que uma EA-aplicação exista para todos os grupos algébricos solùveis (é claro que não existe para os grupos não solùveis) mas:

Conjectura 6 *Para um grupo algébrico solúvel G, uma EA-aplicação existe se, e somente se, $codim_G N(G) \leq 1$.*

Vamos lembrar alguns teoremas importantes da teoria dos grupos algébricos.

Teorema 5 *[2] Seja L uma álgebra de Lie solúvel de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado de característica 0.*

Então L é algébrica (isso significa que existe um grupo algébrico G tal que $Lie(G) = L$) se, e somente se:

1. $L = T \oplus N$, onde T é um toro de L e N é o nilradical.

2. $N = \sum_{\alpha \in T^\star} \oplus N_\alpha$, onde $N_\alpha = \{x \in N | xt = \alpha(t)x, \forall t \in T\}$ e

$$dim_{\mathbf{Q}}\{\alpha | N_\alpha \neq 0\} = dim_k\{\alpha | N_\alpha \neq 0\}.$$

Teorema 6 *[19] Seja G um grupo algébrico local, então existe um grupo algébrico global G_1 tal que G é isomorfo ao G_1 como grupos locais.*

O teorema seguinte mostra que os teoremas ?? e ?? não são válidos para os loops algébricos alternativos.

Teorema 7 *(Grishkov,([6])) Seja $B = B(n,m), n,m \in \mathbf{Z}$, a BL-álgebra do Examplo ??. Então B é* **algébrica** *se, e somente se, $m \neq 0$ e $n/m \in \mathbf{Q}$ ou $n = m = 0$.*

Teorema 8 *[6]Seja $B = B(n,m)$ a BL-álgebra como acima. Então existe um loop algébrico alternativo global $G_1 = G_1(n,m)$ que corresponde à B se, e somente se, $n/m \in \mathbf{Z}$.*

Se $n = ms, 2 \leq s, n, m \in \mathbf{N}$ então

$$G_1 = \{(x_1, ..., x_4) | x_1 \neq 0, x_i \in k, i = 1, ..., 4\},$$

$$(x_1, ..., x_4) \cdot (y_1, ..., y_4) = (x_1 y_1, x_2 y_1^n + y_2, x_3 y_1^n + y_3, \alpha),$$

onde

$$\alpha = x_4 y_1^m + y_4 + y_1^n (x_2 y_3 - x_3 y_2) (\sum_{j=0}^{s-2} \sum_{i=0}^{j} x_1^{in} y_1^{jn}) / n(s-1).$$

Os teoremas 7 e 8 confirmam a Conjectura seguinte:

Conjectura 7 *Seja B uma BL-álgebra solúvel de dimensão finita sobre um corpo k algébricamente fechado de característica 0. Então B é algébrica (local) se, e somente se,*

(i)$B = T \oplus N$, onde T é um toro e N é o nilradical de B.

(ii)$N = \sum_{\alpha \in T^\star} \oplus N_\alpha, dim_{\mathbf{Q}}\{\alpha | N_\alpha \neq 0\} = dim_k\{\alpha | N_\alpha \neq 0\}$.

(iii)$N_0^2 \subseteq N_0$.

E mais, B é algébrica global se, e somente se, temos (i)-(iii) e

(iv) $N_\alpha N_\alpha \subset \sum_{p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \oplus N_{p\alpha}, \forall \alpha \in T^\star$.

Notemos que para os loops de Moufang esta Conjectura foi provada em [9].

5 Um análogo da aplicação exponential em característica positiva e suas aplicações para a teoria dos grupos e loops.

Chevalley mostrou que a correspondência entre **álgebras de Lie e grupos algebriícos** não é válida em característica positiva. Por isso é importante encontrar um análogo dessa correspondência em característica $p > 0$.

Denotamos por $\mathcal{LN}_n(F)$ o conjunto das p-subálgebras de Lie da álgebra

$$N_n(F) = \{a \in M_n(F) | a_{ij} = 0, i \geq j\},$$

onde F é um corpo de característica $p > 2$ e $M_n(F)$ é a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre F. Analogamente, por $GN_n(F)$ denotamos o conjunto dos subgrupos fechados do grupo

$$U_n(F) = \{a \in M_n(F) | a_{ii} = 1, a_{ij} = 0, i > j\}.$$

É obvio que a álgebra de Lie $L(G)$ que corresponde ao grupo $G \in GN_n(F)$ pertence a $LN_n(F)$. Se o corpo F tem característica 0, existe a aplicação exponential $exp : L(G) \to G$ para $G \in GN_n(F)$. Neste caso, cada álgebra de Lie $L \in \mathcal{LN}_n(F)$ pode ser considerada como um grupo de $GN_n(F)$ com multiplicação dada pela série de Campbell-Hausdorf. Mas esta série não tem sentido sobre um corpo de característica positiva. É pouco provável que existe uma boa correspondencia entre $GN_n(F)$ e $\mathcal{LN}_n(F)$ porque temos exemplos de grupos não isomorfos $G_1, G_2 \in GN_n(F)$ tais que $L(G_1) \simeq L(G_2)$. Podemos reformular o problema.

Problema 5 *Encontrar uma função* **canônica** *(em algum sentido)*

$$\mathcal{F} : \mathcal{LN}_n(F) \to GN_n(F)$$

tal que $L(\mathcal{F}(L)) \simeq L$.

Este problema ainda esta em aberto. Vamos dizer que existe uma solução clássica deste problema se existe uma aplicação $\mathcal{E} : L(G) \to G, L = L(G) \in \mathcal{LN}_n(F)$, $G \in GN_n(F)$ tal que L é um grupo, com multiplicação $a \cdot b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b))$ e este grupo é isomorfo ao grupo G.

Seja F um corpo de característica 3 e

$$\mathcal{JN}_n(F) = \{L \in \mathcal{LN}_n(F) | \forall a, b, c \in L : \{a, b, c\} = abc + cba \in L\}.$$

Notemos que, nesta definição, produtos abc e cba são produtos habituais de matrizes.

Teorema 9 *[8] Com as notações acima, existe uma série*

$$\mathcal{E}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$

tal que para cada $L \in \mathcal{JN}_n(F)$ podemos considerar L como um grupo algébrico com multiplicação $a \cdot b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)) \in L$ e a álgebra de Lie correspondente isomorfa a L.

Uma série, tal como a definida no Teorema 9, serćhamada uma aplicação **3-exponencial**.

Teorema 10 *[8] Seja $\mathbf{Z}_3$ o anel dos números inteiros 3-ádicos. Se $E(x) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \in \mathbf{Z}_3[[x]]$ é uma série tal que*

$$E'(x) = \Lambda(x)E(x),$$

onde $E'(x)$ é a derivada de $E(x)$ e $\Lambda(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x^{2i}$, então $\overline{E}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i x^i$ é uma aplicação 3-exponencial. Aqui $\overline{A} \in \mathbf{Z}_3$ é um elemento do corpo $\mathbf{Z}_3/3\mathbf{Z}_3$ que corresponde à A.

Conjectura 8 *A afirmação recíproca de Teorema 10 é verdadeira.*

Exemplo 2 *Seja*

$$E(x) = exp(\sum_{i=0}^{\infty} x^{3^i}/3^i) \in \mathbf{Z}_3[[x]]$$

o exponente de Artin-Hasse, para $p = 3$. Então

$$E'(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} x^{3^i - 1})E(x), E(0) = 1.$$

Logo $\overline{E}(x)$ é uma aplicação 3-exponencial.

Exemplo 3 *[8] Seja*
$$E(x) = x + \sqrt{1+x^2},$$
então
$$E'(x) = (\sqrt{1+x^2})^{-1}E(x), E(0) = 1.$$
E $\overline{E}(x)$ *é uma aplicação 3-exponencial.*

Notemos que a prova de Teorema 10 é baseada no fato que a aplicação 3-exponencial $E(x)$ do ultimo exemplo é algébrica:

$$E(x)^2 - 2xE(x) - 1 = 0$$

e a aplicação inversa (3-logaritmica) é racional

$$\overline{E}^{-1}(x) = (x - x^{-1})/2.$$

Podemos considerar álgebras de Lie de $\mathcal{JN}_n(F)$ como álgebras com duas operações: uma binária $[,]$ e outra ternária $\{,,\}$. Não é difícil provar as seguintes identidades:

$$x^2 = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0, \tag{1}$$

$$\{x,y,z\} = \{z,y,x\}, \tag{2}$$

$$\{x,y,z\} - \{y,x,z\} = [[x,y],z], \tag{3}$$

$$[\{x,y,z\},t] = \{[x,t],y,z\} + \{x,[y,t],z\} + \{x,y,[z,t]\}, \tag{4}$$

$$\{\{x,y,z\},t,u\} = \{\{x,t,u\},y,z\} - \{x,\{y,t,u\},u\} + \{x,y,\{z,t,u\}\}. \tag{5}$$

Vamos chamar uma álgebra com duas operações $[,]$ e $\{,,\}$ uma álgebra de **Lie-Jordan** (LJ-álgebra) se ela satisfaz as identidades (1-5).

Teorema 11 *[8] Seja L uma LJ-álgebra de $\mathcal{JN}_n(F)$ e $\mathcal{E}$ uma aplicação 3-exponencial. Então existe uma série $H(a,b)$ em termos das operações $[,]$ and $\{,,\}$ tal que*
$$a \star b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)) = H(a,b).$$

Notemos que uma LJ-álgebra $L \in \mathcal{JN}_n(F)$, com multiplicação $a \star b = H(a,b)$, é um grupo algébrico. A série

$$H(a,b) = a + b - [a,b] + \{a,b,a\} + \{b,a,b\} + \ldots$$

é a análoga da série clássica de Campbell-Hausdorf em característica 3.

Seja L uma LJ-álgebra nilpotente sobre F. Podemos considerar L como um loop $(L, \star)$, com operação $a \star b = H(a,b)$. Temos

Teorema 12 *[5] $(L, \star)$ é um grupo.*

Agora podemos aplicar a série $H(a,b)$ para a construção de loops de Moufang e alternativos. Vamos dizer que uma álgebra B com duas operações $[,]$ e $\{,,\}$ é uma LJ-álgebra binária (BLJ-álgebra) se cada par de elementos de B geram uma LJ-subálgebra de B. È obvio que cada BLJ-álgebra nilpotente é um loop alternativo, em relação à multiplicação $a \star b = H(a,b)$.

Definição 2 *Seja B uma álgebra com duas operações $[,]$ e $\{,,\}$ sobre um corpo de característica 3. Então B é uma* **MJ-álgebra (Malcev-Jordan álgebra)** *se B satisfaz as identidades (1),(2),(4),(5) e a identidade*

$$\{x,y,x\} - \{y,x,x\} = [[x,y],x].$$

A conjectura principal sobre MJ-álgebras é a seguinte:.

Conjectura 9 *Seja B uma MJ-álgebra nilpotente sobre um corpo de característica 3. Então $(B, \star)$ é um loop de Moufang onde $a \star b = H(a,b)$.*

Esta Conjectura é um corolàrio simples da seguinte.

Conjectura 10 *Seja B uma MJ-álgebra sobre um corpo de característica 3. Então existe uma álgebra alternativa A e um homomorfismo π de MJ-álgebras $\pi : B \to A^{(\pm)}$ tal que $ker(\pi) = 0$. Aqui $A^{(\pm)}$ é uma MJ-álgebra com operações $[a,b] = ab - ba$ e $\{a,b,c\} = (ab)c + (cb)a$.*

Esta Conjectura não é trivial mesmo no caso quando $[a,b] = 0, \forall a,b \in B$ e a álgebra A é comutativa.

O problema principal é como generalizar os resultados e as conjecturas obtidas acima em caso de característica 3, para característica $p > 3$.

Fixamos um corpo F de característica $p \geq 3$. Para definir as álgebras $\mathcal{JN}_n(F) \subseteq \mathcal{LN}_n(F)$, precisamos encontrar um análogo do polinômio $abc + cba$. Seja A uma álgebra associativa livre com dois geradores a, b sobre $\mathbf{Z}$. È um fato conhecido que $(a+b)^p - a^p - b^p \in Lie(a,b) \subseteq A$. Isto significa que existe um polinômio de Lie, $p(a,b) \in Lie(a,b)$, tal que $(a+b)^p - a^p - b^p - p(a,b) = pf(a,b)$, $f(a,b) \in A$. Notemos que $f(a,b)$ é definido unicamente modulo $Lie(a,b)$.

Agora podemos definir

$$\mathcal{JN}_n(F) = \{L \in \mathcal{LJ}_n(F) | \forall a, b \in L : f(a,b) \in L\}.$$

Conjectura 11 *Com as notações acima, existe uma série sobre F:*

$$\mathcal{E}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

tal que, para cada $L \in \mathcal{JN}_n(F)$, podemos considerar L como um grupo algébrico com multiplicação $a \cdot b = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)) \in L$ e L é a álgebra de Lie correspondente a este grupo.

Como acima, se existir uma séries $\mathcal{E}(x)$, tal como a definida na Conjectura 11 , ela será chamada uma **aplicação p-exponencial**.

Conjectura 12 *Seja $\mathbf{Z}_p$ o anel dos números p-ádicos inteiros e $E(x) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \in \mathbf{Z}_p[[x]]$ uma série tal que*

$$E'(x) = \Lambda(x) E(x),$$

onde $E'(x)$ é a derivada de $E(x)$ e $\Lambda(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x^{(p-1)i}$. Então a série $\overline{E}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i x^i$ é uma aplicação p-exponencial.

È facil notar que a exponente de Artin-Hasse

$$\mathcal{E}(x) = exp(\sum_{i=0}^{\infty} x^{p^i}/p^i) \in \mathbf{Z}[[x]]$$

satisfaz os condições de Conjectura 12.

6 lgebras comutativas, nil com potencias associativas.

Lembramos que uma lgebra A sobre $\mathbf{C}$ uma lgebra nil com potencias associativas se para qualquer elemento $x \in A$ existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $x^n = x^{n-1}x = 0$ e $x^2x^2 = (x^2x)x$. Uma das mais intrigantes e dificeis problemas na teoria das lgebras de dimeno finita sobre $\mathbf{C}$ o sequinte Conjectura de Albert:

Conjectura 13 *Seja A uma lgebra comutativa, nil com potencias associativas de dimeno finita sobre $\mathbf{C}$.*

Ento $A^2 \neq A$ e lgebra A solvel.

Acho que este Conjectura muito dificil e profunda. Por isso vale a pena tentar provar este Conjectura em alguns casos particulares.

Vamos denotar por $\mathcal{A}$ a variedade das lgebras comutativas, nil de grau quatro. Claro que $\mathcal{A}$-lgebras so lgebras com potenciais associativas. Mesmo para $\mathcal{A}$-lgebras o Conjectura de Albert esta em aberto e dificil.

bom tentar aplicar metodos classicos desenvolvidos para analise das lgebras de Lie, de Jordan, de Malcev e etc. para estudo de estrutura das $\mathcal{A}$-lgebras. O principal obstaculo para isso o analogo de teorema de Engel na teoria das lgebras de Lie, que pode ser formulado no caso das $\mathcal{A}$-lgebras na forma seguinte:

Conjectura 14 *Seja A uma $\mathcal{A}$-lgebra de dimeno finita sobre $\mathbf{C}$. Ento $\mathcal{A}$ nilpotente se e somente se para cada par elementos $x, y \in \mathcal{A}$ tal que $x^2 = y^2 = xy = 0$ operador $\phi \in End_{\mathbf{C}}A, \phi(a) = (ax)y$ nilpotente.*

Este Conjectura mostra a importancia de conhecimento dos mdulos sobre $\mathcal{A}$-lgebra $A_2 = \{a,\, b\,|a^2 = b^2 = ab = 0\}$.

Estrutura dos A_2-mdulos no trivial pois temos [12]:

Teorema 13 *Seja $Ass(A_2)$ a lgebra associativa com geradores $\{a,\, b\}$ e relaes $\{a^3 = b^3 = a^2b + aba + ba^2 = b^2a + bab + ab^2 = 0\}$.*

Ento as categoriais dos A_2-mdulos e $Ass(A_2)$-mdulos so isomorfas. E mais, a lgebra $Ass(A_2)$ tem base

$$a^2(ba)^n,\ a(ba)^n,\ a^2(ba)^nb,\ (ab)^n,\ (ba)^n,\ a^2(ba)^nb^2,$$

$$(ab)^b,\ (ba)^nb,\ (ba)^nb^2.$$

em particular tem dimeno infinita.

No dificil classificar os $Ass(A_2)$-mdulos irredutiveis de dimeno finita [12].

Proposição 1 *Seja V um $Ass(A_2)$-mdulo irredutivel de dimeno finita. Ento $V = V_0$ tem dimeno um e $VAss(A_2) = 0$ ou $dim_{\mathbf{C}} V = 3$ e $V = V_\alpha$ tem uma base $\{v_1, v_2, v_3\}$ tal que*

$$v_1 b = v_2,\ v_2 b = v_3,\ v_3 b = v_1 a = 0,\ v_2 a = \alpha v_1,\ v_3 a = -\alpha v_2.$$

As perguntas sequintes so mais dificeis.

Problema 6 *1. Classificar os $Ass(A_2)$-mdulos irredutiveis de dimeno infinita.*

2. Classificar os $Ass(A_2)$-mdulos indecomponiveis de dimeno finita.

Se resolver a parte dois do ultimo Problema podemos atacar a Conjectura 13 para $\mathcal{A}$-lgebras usando teoria dos mdulos e seos productos tensoriais, como em caso das lgebras de Lie-Binrias [3].

7 Loops de cdico

Na teoria dos cdicos binrios tem muita importancia os cdicos pares. Por definio um subespao $V \subseteq \mathbf{F}_2^n$ se chama um cdico binrio par se $|v| \equiv 0(mod 4)$ e $v \cdot w \equiv 2(mod 2)$ para todos $v, w \in V$. Aqui $\mathbf{F}_2 = \{0,1\}$ o corpo de dois elementos, $\mathbf{F}_2^n$ um espao de dimeno n sobre $\mathbf{F}_2$, $|v| = m$, se $v = (v_1, ...v_n)$, $v_i \in \mathbf{F}_2$ e $m = |\{i | v_i = 1\}|$,$v \cdot w = |\{i | v_i = w_i = 1\}|$.

Seja V um cdico binrio par. Denotamos por $L(V)$ o conjunto $V \cup -V$. Ento $L(V)$ possui a estrutura de loop de Moufang tal que

$$v^2 = (-1)^{|v/4|} 0,\ [v, w] = v^{-1} w^{-1} v w = (-1)^{v \cdot w/2} 0,$$

$$(v, w, u) = ((vw)u)((v(wu))^{-1}) = (-1)^{v \cdot w \cdot u}).$$

Este loop de Moufang se chama loop de cdico de posto m, se $dim_{\mathbf{F}_2} V = m$ [14]. claro que o Problema principal sobre os loops de cdico o Problema de classificao. Este Problema muito dificil e no ha esperana de que ele pode ser resolvido para posto arbitrrio. Por isso pretendo classificar os loops de cdico para postos ate 6 e procurar os invariantes e construes gerais.

Seja $V \subset \mathbf{F}_2^n$, $W \subset \mathbf{F}_2^m$ dois cdicos binrios pares. Um isomorfismo $\phi : V \to W$ se chama *blow up* se existe um homomorfismo $\tau : \mathbf{F}_2^n \to \mathbf{F}_2^m$ tal que $\tau(e_i) \cdot \tau(e_j) = 0$, se $i \neq j$ e $e_i = (o, ..., 1, ..., 0)$ tem 1 no lugar i, e mais: $\tau(v) = \phi(v)$ para $v \in V$. Entre todos os cdicos binrios pares vamos introduzir a equivalencia mnima tal que V e W so equivalentes se existe entre eles um *blow up*. Claro que dois cdicos equivalentes so de mesmo posto.

Conjectura 15 *Dois cdicos binrios pares so equivalentes se e somente se eles tem mesmo posto.*

Esta Conjectura foi provada para os postos 3 e 4 [13]. Seja $SL(2, n)$ o grupo dos matrizes $n \times n$ sobre $\mathbf{F}_2$. No trabalho [13] foi definido um $SL(2, n)$-mdulo U e para qualquer subespao $T \subset U$ de codimeno 1 foi consruido um loop de cdico T_1 tal que os loops T_1 e S_1 so isomorfos se e somente se os subespaos correspondentes T e S so $SL(2, n)$-conjugados. Seja L um loop de cdico e V um cdico binrio par tal que $L(V) = L$. Vamos deser neste caso que V uma representao de L.

Problema 7 *Para um loop de cdico dado descrever o conjunto dos representaes de L.*

References

[1] Block R. *The Irreducible Representations of the Lie Algebra sl(2) and of the Weyl Algebra,* Advances in Math.,v.39,1981,69-110.

[2] Chevalley C. *Théorie des Groupes de Lie.* Tome II, Actualités Sci.Ind. No. 1152. Paris,1951.

[3] Grishkov A.N. *Structure and representation of binary-Lie algebras,* Izv.Akad.Nauk SSSR, ser.mat. V.44,(1980), pp.999-1030.

[4] Grishkov A.N. *On the conjugacy of Levi factors in Binary Lie algebras,* Izv.Akad.Nauk SSSR,ser.mat., V.50,(1986),No.2, pp.305-334.

[5] Grishkov A.N., Shestakov I.P. *On the speciality of the Lie-Jordan Algebras,* artigo submetido.

[6] Grishkov A.N. *Algebraic diassociative Loops.* (trabalho em andamento).

[7] Grishkov A.N. *Solvable Lie Groups over rings*, Preprint,Novosibirsk, 1986,p.36.

[8] Grishkov A.N. *An analogy of the exponential map in characteristic 3,*(trabalho em andamento).

[9] Grishkov A.N. *One category of Lie algebras with the automorphisms and their applications to Malcev algebras and Moufang Loops,*, artigo submetido.

[10] Grishkov A., Costa R. *Graphs and non-associative algebras,* Jornal Math.Science,New York,v.93,(1999),n.6, 877-882.

[11] Grishkov A., Santos G., Martinez C. *A radical splitting thorem for Bernstein algebras,* Commun.in Algebras, v.26.n.8 (1998),2529-2542.

[12] Grishkov A,N,*Commutative nil algebras of degree 4*, Trabalho em andamento.

[13] Grishkov A.N. *Cod Loops and groups with triality*, Trabalho em andamento.

[14] Griss, *Loop*

[15] Kerdman F. *Global analytic Moufang Loops*, Algebra i Logika, v.18,n.5, p. 523-555.

[16] Kostant B. *On the Tensor Product of a Finite and Infinite Dimensional representation,* J.of Functional Analisis, v.20,1975,257-285.

[17] Malcev A.I. *Analitic loops,* J.Mat.Sb., V.36,(1955), p.569-576.

[18] Shestakov I.,Shirshov A.,Slin'ko A.,Zhevlakov K.,*Rings that are nearly associative,* New York,Academic Press,1982,371p.

[19] Weyl A. *On algebraic groups and homogeneous spaces.* Amer.J.Math.,77(1955),p.493-512.