MAT5799 – Variedades diferenciáveis e grupos de Lie
Lista de exercícios 6 – 14/11/2008

51. Mostre que $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ não é da forma e^A para $A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$.

52. Exiba exemplos de matrizes A, $B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ tais que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

53. Exiba um exemplo de grupo de Lie que contém um subgrupo que não é fechado.

54. Clasifique as álgebras de Lie reais de dimensão dois e de dimensão três.

55. Determine o centro de $SU(n)$.

56. Seja $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Mostre que

$$e^X = \begin{cases} \cosh(-\det X)^{1/2} I + \frac{\sinh(-\det X)^{1/2}}{(-\det X)^{1/2}} X & \text{se } \det X < 0, \\ \cos(\det X)^{1/2} I + \frac{\sin(\det X)^{1/2}}{(\det X)^{1/2}} X & \text{se } \det X > 0, \\ I + X & \text{se } \det X = 0. \end{cases}$$

57. Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ curvas C^∞ em um grupo de Lie G tais que $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ e seja $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$. Prove que $\dot{\gamma}(0) = \dot{\alpha}(0) + \dot{\beta}(0)$. (Sugestão: considere a multiplicação no grupo $\mu : G \times G \to G$ e mostre que $d\mu(v, w) = d\mu((v, 0) + (0, w)) = v + w$ para v, $w \in T_1 G$.)

58. Mostre que o núcleo de um homomorfismo de recobrimento $\varphi : G \to H$ é discreto e central.

59.

a. Prove que toda matriz $g \in GL(n, \mathbf{R})$ pode ser unicamente escrita com um produto $g = hk$ onde $h \in O(n)$ e k é uma matriz simétrica definida positiva.

b. Prove que a exponencial de matrizes define uma bijeção entre o espaço das matrizes simétricas reais e o conjunto das matrizes simétricas reais definidas positivas. (Sugestão: use um argumento de diagonalização.)

c. Conclua que existe um difeomorfismo $O(n) \times \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \approx GL(n, \mathbf{R})$.

60. Mostre que $A + iB \in GL(n, \mathbf{C}) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbf{R})$ define um mergulho φ de $GL(n, \mathbf{C})$ sobre um subgrupo fechado de $GL(2n, \mathbf{R})$. Mostre também que φ se restringe a um mergulho de $U(n)$ sobre um subgrupo fechado de $O(n)$.

61. Seja

$$H^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad x,\, y,\, z \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

a. Mostre que H^3 é um grupo de Lie (é o chamado *grupo de Heisenberg*).

b. Mostre que $A = \frac{\partial}{\partial x}$, $B = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$, $C = \frac{\partial}{\partial z}$ são campos de vetores invariantes à esquerda. Calcule os colchetes entre esses campos.

c. Descreva a álgebra de Lie de H^3.