# MAT5799 – Variedades diferenciáveis e grupos de Lie
# Lista de exercícios 4 – 14/10/2008

31. Prove que $v_1, \ldots, v_k \in V$ são linearmente independentes se e somente se $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$.

32. Sejam $V$, $W$ espaços vetoriais e $T : V \to W$ linear. Mostre que $T$ induz naturalmente uma aplicação linear $\Lambda_k(T) : \Lambda_k(V) \to \Lambda_k(W)$. Seja agora $n = \dim V$ e considere $W = V$ e $k = n$. Como $\Lambda_n(V)$ é unidimensional, $\Lambda_n(T)$ é a multiplicação por um escalar. Defina o *determinante* de $T$ como sendo este escalar. Se $A$ é uma matriz $n \times n$, seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base de $V$ e seja $T$ o operador linear em $V$ que é representado por $A$ em relação a essa base. Defina o *determinante* de $A$ como sendo o determinante de $T$. Mostre que o determinante de $A$ não depende da escolha de base em $V$. Usando esta definição, mostre que

$$\det A = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

onde $A = (a_{ij})$, $\operatorname{sgn} \sigma$ é o sinal da permutação $\sigma$ e $\sigma$ percorre o conjunto de todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$. Prove também que o determinante do produto de duas matrizs é igual ao produto de seus determinantes.

33. Construa um isomorfismo canônico $V^* \otimes W \cong \operatorname{Hom}(V, W)$.

34. Seja $M = \mathbf{R}^3$ com coordenadas $x$, $y$, $z$. Em cada caso, decida se $d\omega = 0$ ou se existe $\eta$ tal que $d\eta = \omega$.

*a.* $\omega = yzdx + xzdy + xydz$.

*b.* $\omega = xdx + x^2y^2dy + yzdz$.

*c.* $\omega = 2xy^2dx \wedge dy + zdy \wedge dz$.

35. Um elemento $\omega \in \Lambda_k(V)$ é chamado de *decomponível* se $\omega = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$ para alguns $\phi_i \in V^* = \Lambda_1(V)$.

*a.* Se $\dim V \leq 3$, então todo $\omega \in \Lambda_2(V)$ é decomponível.

*b.* Se $\phi_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ são linearmente independentes, então $\omega = \phi_1 \wedge \phi_2 + \phi_3 \wedge \phi_4$ não é decomponível. (Sugestão: considere $\omega \wedge \omega$.)

36. Sejam $\omega \in \Omega^k(M)$ e $X_0, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M)$. Prove que:

*a.*

$$\begin{aligned} L_{X_0}\omega(X_1, \ldots, X_k) &= X_0(\omega(X_1, \ldots, X_k)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X_0, X_i], X_{i+1}, \ldots, X_k). \end{aligned}$$

*b.*

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \ldots, X_k) &= \sum_{i=0}^{k} X_i \omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k). \end{aligned}$$

37. Seja $M$ uma variedade diferenciável. Uma *métrica Riemanniana* em $M$ é um $(0,2)$-tensor $g$ que é simétrico[1] e que para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$ satisfaz: $g_p(v,v) \geq 0$; e se $g_p(v,v) = 0$ então $v = 0$. Segue que cada $g_p$ é um produto interno (forma bilinear simétrica definida positiva) em $T_pM$. Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável equipada com uma métrica Riemanniana.

*a.* Fixe $(U, x_1, \ldots, x_m)$ um sistema de coordenadas em $M$.

 (a) Seja $g$ uma métrica Riemanniana em $M$. Mostre que $g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$ onde $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \in C^\infty(U)$ e $g_{ij} = g_{ji}$.

 (b) Reciprocamente, dadas funções $g_{ij} = g_{ji} \in C^\infty(U)$ mostre como definir uma métrica Riemanniana em $U$.

*b.* Use o item (a) e uma partição da unidade para provar que toda variedade diferenciável pode ser equipada com uma métrica Riemanniana.

*c.* Numa variedade Riemanniana $M$ existe um difeomorfismo natural $TM \approx T^*M$. (Sugestão: existem isomorfismos lineares $v \in T_pM \mapsto g_p(v, \cdot) \in T_pM^*$).

38. Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$. Então $\Lambda_n(V)$ é unidimensional de modo que $\Lambda_n(V) \setminus \{0\}$ possui duas componentes conexas. Uma *orientação* em $V$ é uma escolha de componente de $\Lambda_n(V) \setminus \{0\}$. Um espaço vetorial equipado com uma orientação é chamado de um *espaço vetorial orientado.* Dado um espaço vetorial orientado $V$, dizemos que uma $n$-forma não-nula $\omega$ *pertence* à orientação de $V$ se $\omega$ pertence à componente conexa de $\Lambda_n(V) \setminus \{0\}$ que define a orientação.

Suponha que $V^*$ é um espaço vetorial orientado. Dizemos que uma base ordenada $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $V$ é *positivamente orientada* se $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ é uma $n$-forma não-nula que pertence à orientação de $V^*$, onde denotamos com $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ a base ordenada dual de $V^*$. Mostre que uma base ordenada $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $V$ é positivamente orientada se e somente $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$ para qualquer $n$-forma não-nula $\omega$ que pertence à orientação de $V^*$.

39. Seja $M$ uma variedade diferenciável *conexa* de dimensão $n$. Dizemos que $M$ é *orientável* se existe uma $n$-forma diferencial $\omega$ tal que $\omega_p \neq 0$ para todo $p \in M$. Sejam $\omega$, $\eta$ duas $n$-formas diferenciais em $M$ que nunca se anulam. Então existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega = f\eta$ e $f$ nunca se anula (mostre isso). Dizemos que $\omega$ e $\eta$ são equivalentes se $f > 0$ em $M$. Se $M$ é uma variedade orientável, uma orientação para $M$ é uma escolha de classe de equivalência de $n$-forma diferenciáveis que nunca se anulam; nesse caso existem exatamente duas orientações possíveis para $M$ (verifique). Dizemos que $M$ é uma variedade *orientada* quando está fixada uma orientação em $M$. De acordo com o Ex. 48, uma orientação em $M$ determina uma orientação em cada espaço tangente $T_pM^*$.

Seja $(M, \mathcal{F})$ uma variedade diferenciável. Prove que são equivalentes:

*a.* $M$ é orientável.

*b.* Existe um subatlas diferenciável $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ tal que para $(U, \varphi)$, $(V, \psi) \in \mathcal{F}'$ temos que a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ tem determinante Jacobiano positivo.

[1] Isto significa que $g(X,Y) = g(Y,X)$ para $X$, $Y \in \mathcal{X}(M)$

40. Seja $(M, \mathcal{F})$ uma variedade diferenciável. Uma *estrutura quase-complexa* em $M$ é um $(1,1)$-tensor $J$ tal que para todo $p \in M$ temos $J_p^2 = -id_{T_pM}$, onde consideramos $J_p : T_pM \to T_pM$.

*a.* Mostre que se existe uma estrutura quase-complexa em $M$, então $\dim M$ é par e $M$ é orientável.

*b.* Mostre que se $J$ é uma estrutura quase-complexa em $M$, então

$$N(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J([X, JY] + J[JX, Y])$$

onde $X$, $Y \in \mathcal{X}(M)$, define um $(1,2)$-tensor em $M$.

*c.* Suponha que $\dim M = 2n$ e existe um subatlas $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ tal que para $(U, \varphi)$, $(V, \psi) \in \mathcal{F}'$ temos que a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbf{R}^{2n} \to \psi(U \cap V) \subset \mathbf{R}^{2n}$ é uma transformação holomorfa, onde identificamos $\mathbf{R}^{2n}$ com $\mathbf{C}^n$ da maneira usual. ($\mathcal{F}'$ é chamado de um *atlas complexo* para $M$. Um atlas complexo maximal é chamado de uma *estrutura complexa* para $M$, e $M$ equipada com uma estrutura complexa é chamada de uma *variedade complexa*.) Mostre que é possível definir uma estrutura quase-complexa em $M$ de modo que para todo $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{F}'$ temos $J_p(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p) = \frac{\partial}{\partial y_j}|_p$ e $J_p(\frac{\partial}{\partial y_j}|_p) = -\frac{\partial}{\partial x_j}|_p$. Uma estrutura quase-complexa que provém de uma estrutura complexa como acima é chamada de *integrável.*

*d.* Mostre que se $J$ é uma estrutura quase-complexa integrável em $M$ então $N = 0$. (*Reciprocamente, é um teorema profundo de Newlander-Nirenberg que se uma estrutura quase-complexa $J$ em $M$ satisfaz $N = 0$ então $J$ é integrável.*)