EXERCÍCIOS, 2.ª PARTE

15/02/22

24jan, Supl., Ex.1

Seja V um espaço vetorial de dim finita e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ t.q. $\ker T = \operatorname{im} T$. Mostrar que dim é par e exibir um exemplo.

Resolução. $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = 2 \dim \ker T$ é par.

B: v_1, v_2 base de V

$$T: \begin{aligned} v_1 &\mapsto 0 \\ v_2 &\mapsto v_1 \end{aligned}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ é nilpotente: $T^2 = 0$

//

8fev, Supl., Ex.2

Dados: $\mathbb{C}^2$ com prod interno usual, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $[T]_{\underline{can}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, verificar que T é normal e determinar uma base o.n. de $\mathbb{C}^2$ constituída por autovetores de T.

Resolução. $\underline{can}$ é ortonormal $\Rightarrow$ $[T^*]_{\underline{can}} = [T]^*_{\underline{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I + iK$$

I comuta com qq. matriz 2x2 cxq.

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = I - iK$$

K comuta consigo mesma

$\Rightarrow$ $[T]_{can}, [T]^*_{can}$ comutam $\therefore$ $TT^* = T^*T$

$\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{[T^*]_{can}}$ $\qquad\qquad \therefore$ T é normal

Pelo T. Espectral no caso cxo, já sabemos que existe uma base o.n. de $\mathbb{C}^2$ formada por auto-vetores de T.

Vamos determiná-la.

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ i & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \ (*)$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + iy = 0 \\ ix + (1-\lambda)y = 0 \Rightarrow x = i(1-\lambda)y \end{cases}$$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$ ↯

$$i(1-\lambda)^2 y + iy = 0 \qquad \cancel{i}\,((1-\lambda)^2 + 1)y = 0$$

$$\Downarrow y \neq 0$$

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\lambda)^2 = -1 \Rightarrow 1-\lambda = \pm i$$

$$\boxed{\lambda = 1 \pm i}$$ Autovalores de T

Calculemos os autovetores:

$\boxed{\lambda = 1 - i}$ Substituindo em $(*)$,

$1 - \lambda = i$

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Auto-espaço $E_T(1-i)$

$\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda = 1+i$

$1-\lambda = -i$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mu \in \mathbb{C}$

$E_T(1+i)$

Resp $B: \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ é base o.n. ✓ de $\mathbb{C}^2$ formada por autovetores de T

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \quad //.$$

27 jan, Supl., Ex. 2

$0 \neq N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $N^2 = 0 \Rightarrow \exists$ base B de $\mathbb{C}^2$ t.q.

$$[N]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolução. $N^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{im} N \subset \ker N$

$$N \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\{0\}}_{\dim 0} \underset{\neq}{\subset} \operatorname{im} N \subset \ker N \underset{\neq}{\subset} \underbrace{\mathbb{C}^2}_{\dim 2}$$

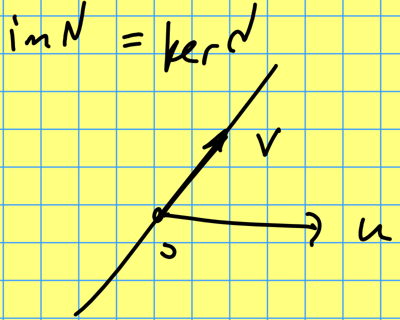
$\Rightarrow \dim \operatorname{im} N \geq 1$, $\dim \ker N \leq 1$

$\therefore \dim \operatorname{im} N = \dim \ker N = 1$

$\therefore \operatorname{im} N = \ker N$

Seja $\underset{\neq 0}{v} \in \underbrace{\operatorname{im} N}_{= \ker N}$ e seja $u \in \mathbb{C}^2$ t.q. $v = Tu$

$\Rightarrow u \notin \ker N$



Portanto u, v LI

Como $\dim \mathbb{C}^2 = 2$, $\underbrace{u, v}_{B}$ é base de $\mathbb{C}^2$

$$[N]_B = \begin{array}{cc|c} Tv & Tu & \\ \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right) & & \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \\ v \in \ker N & Tu = v & \end{array}$$

27jan, Supl., Ex.3 Dados:

V esp vet de dim finita / $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ t.q. todo subespaço de V é T-invariante.

O que é T?

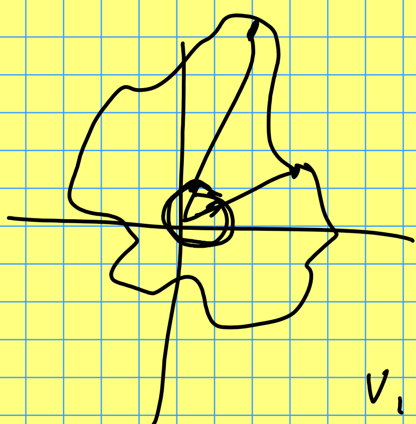
Resolução. Operadores lineares da forma $\underbrace{T = \lambda I}_{T \text{ é um op. escalar}} \in \mathcal{L}(V)$ deixam todo subespaço de V invariante. Mostremos que não há outros.

~~Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ não é da forma λI para $\lambda \in \mathbb{F}$. Construiremos um subespaço U de V que não é T-invariante.~~

Se T deixa todo subespaço de V invariante, em particular T deixa todo subespaço unidimensional de V invariante. Isso quer dizer que todo vetor não-nulo de V é autovetor de T. E então:

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ e $Tv = \lambda(v)v$

$\forall v \in V$, onde $\lambda(v) \in \mathbb{F}$ depende de v.



$$T(v+v') = \begin{cases} Tv + Tv' = \underline{\lambda(v)}v + \underline{\underline{\lambda(v')}}v' \\ \lambda(v+v')(v+v') = \lambda\underline{(v+v')}v + \underline{\underline{\lambda(v+v')}}v' \end{cases}$$

$\underline{v, v' \text{ L.I.}} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda(v) = \lambda(v+v') \\ \lambda(v') = \lambda(v+v') \end{array} \Rightarrow \lambda(v) = \lambda(v')$

$v, v' \text{ L.D.} \Rightarrow v' = \mu v \Rightarrow T(v') = \begin{cases} T(\mu v) = \mu T v = \underline{\mu\lambda(v)}v \\ \lambda(v')v' \end{cases}$

$\neq 0$, $\mu \in \mathbb{F}$

$$\mu\lambda(v)v = \underline{\lambda(v)(\mu v)} = \lambda(v)v'$$

$\Rightarrow \lambda(v') = \lambda(v)$ $\therefore$ λ é constante

Em outras palavras, se todo vetor não-nulo de V é autovetor de T, então T é um operador escalar em V. $T = \lambda I$ //