EXERCÍCIOS

14/02/22

§ 7.A, Ex. 2: $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Então:

λ autovalor de $T \iff \bar{\lambda}$ autovalor de T^*

Resolução. (Michel) Seja λ um autovalor de T. Então $\exists\, v \neq 0$, $v \in V$ t.q. $Tv = \lambda v$. Calculemos

$$\langle Tv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle = \langle v, \bar{\lambda} v\rangle$$

$$= \langle v, T^* v\rangle$$

$$\langle w, T^* v\rangle = \langle w, \bar{\lambda} v\rangle \quad \forall w \in V\ ?$$

$$\langle Tv, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle = \langle v, \bar{\lambda} w\rangle$$

v fixado, autovetor de T

w arbitrário

$$= \langle v, T^* w\rangle$$

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle \quad \forall v, w$$

$\langle Tv, w\rangle = \langle Sv, w\rangle \quad \forall w \Rightarrow \langle (T-S)v, w\rangle = 0 \quad \forall w$

$\Rightarrow (T-S)v \perp w \quad \forall w \Rightarrow (T-S)v = 0 \Rightarrow Tv = Sv$

—n—

Se $e_1, \dots, e_n$ é base ortonormal de V, então

$$v = \underbrace{\langle v, e_1\rangle}_{\text{componente de } v \text{ na direção } e_1} e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$$

para todo $v \in V$

$$u = \underbrace{\langle u, e_1\rangle e_1} + \dots + \langle u, e_n\rangle e_n$$

$$\langle u, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle \ \forall j \Rightarrow u = v$$

—n—

§7.B, Ex 1

V ou F? $\exists\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ não auto-adjunto t.q. existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Resolução. T deve ser diagonalizável numa base que não é ortonormal (por (7.29)).

$$\mathbb{R}^3 \quad B: \overbrace{(1,0,0)}^{=v_1}, \overbrace{(0,1,0)}^{=v_2}, \overbrace{(0,1,1)}^{=v_3}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ que não é o.n.

Definamos T nesse base:

$$T(1,0,0) = 0 \qquad T(0,1,1) = (0,1,1)$$
$$T(0,1,0) = 0$$

• T é diagonalizável em B

$$[T]_B = \begin{array}{cccc} Tv_1 & Tv_2 & Tv_3 & \\ \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) & & & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$$

é diagonal.

• $T \neq T^*$

$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,1,1)$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = x \\ \gamma = z \\ \beta = y - z \end{array}$$

$$T(x,y,z) = \alpha \underbrace{Tv_1}_{=0} + \beta \underbrace{Tv_2}_{=0} + \gamma Tv_3$$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= z(0,1,1) = (0,z,z)$$

$[T]_{can} \neq [T^*]_{can}$

$\Rightarrow T \neq T^*$

$$\langle \overbrace{T^*(a,b,c)}^{=(0,0,b+c)}, (x,y,z) \rangle = \langle (a,b,c), T(x,y,z) \rangle$$

$$= \langle (a,b,c), (0,z,z) \rangle = bz + cz = (b+c)z$$

$$\Rightarrow T^*(a,b,c) = (0,0,b+c)$$

$\ker T^*$: $b+c=0$

a livre

$$(\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*$$

$$\dim \operatorname{im} T = 1 \Rightarrow \dim (\operatorname{im} T)^\perp = 2$$

$$\Rightarrow \dim \ker T^* = 2$$

$$\ker T^* = \operatorname{span}\big((1,0,0),(0,1,-1)\big)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, shift left, "T"] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, shift left, "T^*"] \end{tikzcd} \qquad T, T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$$

$$T^*(1,0,0) = 0 = T(1,0,0)$$

$$T^*(0,1,0) = (0,0,1) \neq 0 = T(0,1,0) \quad \therefore \; T^* \neq T$$

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccc} T^*v_1 & T^*v_2 & T^*v_3 \end{array}$$

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \neq [T]_{\mathcal{B}}^*$$

$$T^*v_2 = (0,0,1) = (0,1,1) - (0,1,0) = v_3 - v_2 = -v_2 + v_3$$

$$T^*v_3 = T^*(0,1,1) = (0,0,2) = 2(0,0,1) = -2v_2 + 2v_3$$

Outro contra-exemplo (Michel):

e_1, e_2, e_3 base canônica de $\mathbb{R}^3$

$Te_1 = e_1$

$Te_2 = 2e_2 + e_1$

$Te_3 = e_3$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

can é o.n.

$$[T^*]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq [T]_{can}$$

$\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_1 + e_2 \\ v_3 = e_3 \end{cases}$

$Tv_1 = v_1$, $Tv_3 = v_3$ $\therefore T^* \neq T$

$Tv_2 = Te_1 + Te_2$

$= e_1 + 2e_2 + e_1$

$= 2v_2$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonal, mas $\mathcal{B}$ não é o.n.

— // —

§ 5.A, Ex. 24

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$, $Tx = Ax$

(a) Suponhamos que a soma dos coefs de cada linha de A seja 1. Mostre que 1 é um autovalor de T.

(b) O mesmo que em (a) trocando linhas por colunas.

Resolução. (a)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sabemos:

$$a_{11} + \ldots + a_{1n} = 1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1} + \ldots + a_{nn} = 1$$

Tem solução em $x_1, \ldots, x_n$

Sim! Todos iguais a 1!

$$x_1 = \ldots = x_n = 1$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1, \ldots, 1)$ é autovetor de T com autovalor 1