AUTOESPAÇOS (§5.C)

01/02/22

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Então o <u>autoespaço</u> de T associado a λ é

$$E_T(\lambda) := \ker(T - \lambda I)$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ é um autovalor de $T \iff E_T(\lambda) \neq \{0\}$

$E_\lambda(T)$ é um subespaço de V e consiste dos autovetores de T, com autovalor λ, <u>mais o vetor nulo</u>.

<u>Ex</u>. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$, $[T]_B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B: v_1, v_2, v_3$

Neste caso, $E_T(8) = \operatorname{span}(v_1)$ e $E_T(5) = \operatorname{span}(v_2, v_3)$.

Também $E_T(\lambda) = \{0\}$ se $\lambda \neq 8$ e $\lambda \neq 5$

<u>Obs</u> $E_T(\lambda)$ é um subespaço invariante e

$$T|_{E_T(\lambda)} = \lambda I_{E_T(\lambda)}.$$

5.38 Suponhamos que $\dim V < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores <u>distintos</u> de T. Então $E_T(\lambda_1) + \dots + E_T(\lambda_m)$ é uma soma direta e

$$\underbrace{\dim E_T(\lambda_1) + \dots + \dim E_T(\lambda_m)}_{\dim(E_T(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_T(\lambda_m))} \leq \dim V. \leftarrow$$

Dem. Suponhamos que $u_i \in E_T(\lambda_i)$, $i=1,\dots,m$, satisfazem $1u_1 + \dots + 1u_m = 0$. É uma relação linear entre os vetores da lista $u_1,\dots,u_m$. Mas autovetores associados a autovalores distintos são L.I.

Portanto $u_1 = \dots = u_m = 0$. Isso mostra que a soma é $\oplus$ // $(\dim V < \infty)$

5.39 Def $T \in \mathcal{L}(V)$ é dito diagonalizável se $\exists$ base B de V t.q. $[T]_B$ seja uma matriz diagonal

5.40 Ex. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

$$T(x,y) = (41x + 7y, -20x + 74y)$$

$$T(1,0) = (41,-20) \qquad [T]_{can} = \begin{pmatrix} 41 & 7 \\ -20 & 74 \end{pmatrix}$$
$$T(0,1) = (7,74)$$

$$E_T(\lambda) = \ker(T - \lambda I)$$

$$(T-\lambda I)(x,y) = (0,0)$$

$$[T-\lambda I]_{can} = \begin{pmatrix} 41-\lambda & 7 \\ -20 & 74-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 41-\lambda & 7 \\ -20 & 74-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NÃO PODE USAR DETERMINANTE, NEM AQUI, NEM EM LUGAR ALGUM DO CURSO!!!

$$\begin{cases} (41-\lambda)x + 7y = 0 \\ -20x + (74-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$y = -\frac{41-\lambda}{7}x \quad (1)$$

$$-20x + (74-\lambda)\left(\frac{\lambda-41}{7}\right)x = 0 \qquad \times \frac{-7}{x}$$

$x=0 \Rightarrow y=0$ por (1). ↯

Agora $x \neq 0$:

$$140 + (\lambda-74)(\lambda-41) = 0$$

$$\lambda^2 - 115\lambda + 3174 = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 = 69 \\ \lambda_2 = 46 \end{matrix}$$

$\boxed{\lambda_1 = 69} \leftarrow \quad y = -\frac{41-69}{7}x = +4x \qquad v_1 = (1,4)$

$\boxed{\lambda_2 = 46} \quad y = -\frac{41-46}{7}x = \frac{5}{7}x \qquad v_2 = (7,5)$

B: $(1,4), (7,5)$ e $[T]_B = \begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline v_1 & 69 & 0 \\ v_2 & 0 & 46 \end{array}$

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1 = 69 v_1$$

$$Tv_2 = \lambda_2 v_2 = 46 v_2$$

B': $(7,5)$, $(1,4)$

$$[T]_{B'} = \begin{array}{c|cc} & v_2 & v_1 \\ \hline v_2 & 46 & 0 \\ v_1 & 0 & 69 \end{array}$$

5.41 Suponhamos que $\overset{n}{\dim} V < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ os autovalores distintos de T. $(m \le n)$ Então as seguintes asserções são equivalentes:

(a) T é diagonalizável.

(b) $\exists$ base B de V formada por autovetores de T

(c) $\exists$ subespaços $U_1, \ldots, U_n$ de dim 1 de V, T-invariantes, t.q. $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$.

(d) $V = E_T(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E_T(\lambda_m)$

(e) $\dim V = \dim E_T(\lambda_1) + \ldots + \dim E_T(\lambda_m)$.

<u>Dem.</u> (a) $\Leftrightarrow$ (b)

B: $v_1, \ldots, v_n$

$$[T]_B = \begin{array}{c|c} & v_1 \ \cdots \ v_i \ \cdots \ v_n \\ \hline \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_i & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow T v_i = \mu_i v_i \Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ são autovetores de T

(b) $\Rightarrow$ (c) Seja B: $v_1, \ldots, v_n$ uma base de autovetores de T. Pomos $U_i := \operatorname{span}(\underbrace{v_i}_{\neq 0})$, $i = 1, \ldots, m$.

$\Rightarrow \dim U_i = 1$

$T(\lambda v_i) = \lambda \underbrace{T v_i}_{\text{múltiplo de } v_i} \in \operatorname{span}(v_i)$

Dado $v \in V$, podemos escrever

$$v = \underbrace{a_1 v_1}_{=: u_1} + \dots + \underbrace{a_n v_n}_{=: u_n}$$ (pois $v_1, \dots, v_n$ é base de V)

onde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ são únicos.

$\Rightarrow$ $v = u_1 + \dots + u_n$ onde $u_i \in U_i$, $i = 1, \dots, n$ de maneira única.

Logo $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Supomos $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ (*) com $\dim U_i = 1$ e U_i T-inv., $\forall i$.

Seja $v_i \in U_i$, $v_i \neq 0$. Então

$$T v_i \in U_i \quad (\text{pois } U_i \text{ é T-inv})$$

$\Rightarrow$ $T v_i = \mu_i v_i$ $\Rightarrow$ v_i é autovetor $\forall i$

Dado $v \in V$, por (*) $\exists$ $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$, únicos, t.q. $v = u_1 + \dots + u_n$.

$$= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

onde a_i é único $\forall i$

$\therefore$ $B: v_1, \dots, v_n$ é base de V.

(b) $\Rightarrow$ (d) $\exists$ base $B: \underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{autovetores de } T}$ de V

Dado $v \in V$, podemos escrever

$$v = \underbrace{a_1 v_1}_{\substack{\text{autovetor}\\ \text{ou}\\ 0}} + \dots + \underbrace{a_n v_n}_{\substack{\text{autovetor}\\ \text{ou}\\ 0}} \quad \text{onde } a_i \in \mathbb{F} \ \forall i$$

$$\Rightarrow V = E_T(\lambda_1) + \dots + E_T(\lambda_m)$$
$$= E_T(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_T(\lambda_m) \quad (\text{por } (5.38))$$

(d) $\Rightarrow$ (e)

$$V = E_T(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_T(\lambda_m)$$
$$\Rightarrow \dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim E_T(\lambda_i)$$

(e) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos $\dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim E_T(\lambda_i)$ $(*)$.

Tomemos uma base B_i de $E_T(\lambda_i)$ e formemos uma lista B justapondo os elementos de $B_1, \dots, B_m$

$$\text{Compr}(B) = \sum_i \text{Compr}(B_i) = \sum_i \dim E_T(\lambda_i) \overset{(*)}{=} \dim V.$$

Basta ver que B é L.I. para concluir que B é uma base de V.

$B: v_1, \dots, v_n$ Suponhamos que

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

Seja u_j = soma dos $a_i v_i$ t.q. $v_i \in E_T(\lambda_j)$.

$\Rightarrow u_1 + \dots + u_m = 0$

$E_T(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_T(\lambda_m) = V$

$\Rightarrow u_1 = \dots = u_m = 0$

Cada $0 = u_j$ = soma de alguns $a_i v_i$ em $E_T(\lambda_j)$

onde esses v_i's formam uma base de $E_T(\lambda_j)$

$\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i : 1, \dots, n$ //

5.43 Ex Revisitamos (5.15)

$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) \quad T(x,y) = (y, 0) \quad T^2 = 0$

Vimos em (5.15) que 0 é o único autovalor de T e $E_T(0) = \text{span}(1,0) = \ker T$

$\underset{\substack{\lambda \text{ autovalor} \\ \text{de } T}}{\sum} \dim E_T(\lambda) = \dim E_T(0) = 1 < 2 = \dim \mathbb{C}^2$

$\therefore$ Falha (e) em (5.41).

span (autovetores de T) $= \text{span}(1,0) \subsetneq \mathbb{C}^2$

$\therefore$ Falha (b)

De toda maneira, T não é diagonalizável //

Obs. Vale sempre $E_T(0) = \ker T$.

5.44 Se $T \in \mathcal{L}(V)$ admite $n = \dim V$ autovalores distintos, então T é diagonalizável.

Dem. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores distintos de T. A cada λ_i está associado pelo menos um autovetor v_i de T. Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são 2 a 2 distintos, $v_1, \dots, v_n$ é L.I. Como Compr $(v_1, \dots, v_n) = n = \dim V$, $v_1, \dots v_n$ é uma base de V.

Por 5.41 (b), T é diagonalizável //

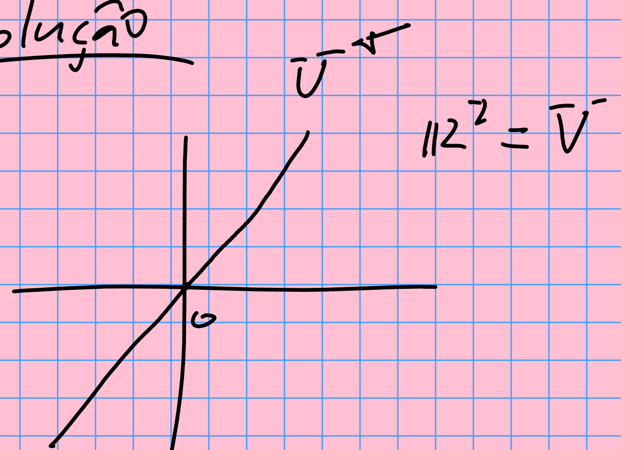
—— // ——

§5.A, Ex 6

Demonstrar ou dar um contra-exemplo:

Se $\dim V < \infty$ e U é um subespaço de V que é invariante por qualquer operador de V, então $U = \{0\}$ ou $U = V$.

Resolução



Verdadeiro?

Mostremos que dado U subespaço de V, diferente de $\{0\}$ e V, sempre existe $T \in \mathcal{L}(V)$ t.q. $T(U) \notin U$.

Seja $v_1, \dots, v_n$ uma base de V t.q. $v_1 \in U$.

Por ex., tomando uma base não-vazia de U e completando a uma base de V. Isso é possível, pois $U \neq \{0\}$.

Seja $w \in V$ com $w \notin U$. Isso é possível pois $U \subsetneq V$.

Definamos $T \in \mathcal{L}(V)$ pondo

$$Tv_1 = w$$
$$Tv_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$Tv_n = 0.$$

Como $Tv_1 = w$, $v_1 \in U$, $w \notin U$, segue que $T(U) \notin U$.

Verdade