31/01/22

§5.B

__Q.__ Dado $T \in \mathcal{L}(V)$ ($\dim V < \infty$), existe uma base B de V t.q. $[T]_B^B =: [T]_B$ seja uma matriz numa "mais simples"?

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

(Discussão relacionada com subespaços T-invariantes de V)

—||—

Seja $T \in \mathcal{L}(V)$

$$T^2 := T \circ T$$

$$T^m := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ vezes}}$$

Se T é invertível, temos $T^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ e

$$T^{-m} := (T^{-1})^m.$$

Valem: $T^m \circ T^n = T^{m+n}$ e $(T^m)^n = T^{mn}$

5.17 __Def__ [$p(T)$]

Dados $T \in \mathcal{L}(V)$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$, pomos $p(T) := a_0 I + a_1 T + \dots + a_m T^m \in \mathcal{L}(V)$

5.18 **Ex** $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, $Dq = q'$

$$p(x) = 7 - 3x + 5x^2 \Rightarrow p(D)q = 7q - 3q' + 5q'' \quad \forall q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Obs Para T fixo,

$$p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto p(T) \in \mathcal{L}(V)$$

é linear. Então $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$

$$(\lambda p)(T) = \lambda p(T)$$

5.20 $(pq)(T) = p(T) \circ q(T)$

Dem $p(z) = \sum_j a_j z^j \qquad q(z) = \sum_k b_k z^k$

$$\Rightarrow (pq)(z) = \sum_{j,k} a_j b_k z^{j+k}$$

$$\Rightarrow (pq)(T) = \sum_{j,k} a_j b_k T^{j+k}$$

$=$

$$p(T) \circ q(T) = \left(\sum_j a_j T^j\right) \circ \left(\sum_k b_k T^k\right)$$

Assoc e distr

Cor $p(T) \circ q(T) = (pq)(T) = (qp)(T) = q(T) \circ p(T)$ //

—//—

EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES

$\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado

5.21 Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ onde $0 < \dim V < \infty$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Então T admite um autovalor

Dem. Seja $n = \dim V > 0$. Tomemos $v \in V$, $v \neq 0$
A lista: $v, Tv, T^2v, \ldots, T^n v$ tem compr $n+1$ $> \dim V$ e, portanto, é L.D. Desta forma, existe um relação linear

$$a_0 v + a_1 T v + \ldots + a_n T^n v = 0 \qquad (1)$$

onde $a_0, \ldots, a_n$ não são todos nulos.
Na verdade, $a_1, \ldots, a_n$ não são todos nulos
Seja

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$$

$m := \deg p \leq n$

$$= c(z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_m) \qquad (2)$$

onde $c \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são as raízes de p $(m \geq 1)$.
De (1):

$$0 = p(T)v$$

$$\overset{(2)}{=} c\,(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_m I)v.$$

Se $(T-\lambda_m I)v = 0$ então $v \in \ker(T-\lambda_m I)$

$\Rightarrow \lambda_m$ é autovalor de T e v é um autovetor de T assoc a λ_m.

Se $(T-\lambda_m I)v \neq 0$

e $(T-\lambda_{m-1} I)\underbrace{(T-\lambda_m I)v}=0$

$\therefore$ é autovetor e λ_{m-1} é autovalor

$\vdots$

Segue que $\ker(T-\lambda_j I) \neq \{0\}$ para algum $j = 1,\dots,m$. $\therefore$ λ_j é um autovalor de T //.

~ // ~

Voltando à questão da "melhor base" para T:

$\boxed{\mathbb{F}=\mathbb{C}}$ Por 5.21, $\exists\, v \in V$, $v \neq 0$, que é um autovetor de T: $Tv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Podemos completar v a uma base

$B: v_1 = v, v_2, \dots, v_n$

$$[T]_B = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v & v_2 & \cdots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Notemos que se conseguíssemos uma base B de V formada exclusivamente por autovetores de T,

$B: v_1, \dots, v_n$, $\quad Tv_j = \lambda_j v_j \quad j = 1, \dots, n$,

então teríamos

$$[T]_B \doteq \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \longleftarrow \text{matriz diagonal}$$

5.25 Def [MATRIZ SUPER-TRIANGULAR OU TRIANGULAR SUPERIOR]:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5.26 Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e seja $B: v_1, \dots, v_n$ uma base de V. Então as seguintes asserções são equivalentes:

(a) $[T]_B$ é triangular superior

(b) $Tv_j \in \operatorname{span}(v_1,\dots,v_j)$ $\forall j = 1,\dots,n$ ✓

(c) $\operatorname{span}(v_1,\dots,v_j)$ é T-invariante $\forall j = 1,\dots,n$

<u>Dem.</u>

$$[T]_B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} v_1 \ \cdots & & v_j & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & \vdots & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_j & \\ \hline & & 0 & \ddots \\ & 0 & \vdots & \\ & & 0 & \lambda_n \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ v_{j+1} \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

(a) $\iff$ (b) ✓

(c) $\Rightarrow$ (b)

(b) $\Rightarrow$ (c) ? Seja $v \in \overbrace{\operatorname{span}(v_1,\dots,v_j)}^{=U}$:

$v = a_1 v_1 + \dots + a_j v_j \qquad a_1,\dots,a_j \in \mathbb{F}$

$\Rightarrow Tv = a_1 \underbrace{Tv_1}_{\substack{\in U \\ \text{por (b)}}} + \dots + a_j \underbrace{Tv_j}_{\substack{\in U \\ \text{por (b)}}} \underbrace{\in}_{U \text{ é subesp}} U$

$\therefore U$ é T-inv //

5.27 Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ onde $\dim V < \infty$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Então existe uma base B de V t.q. $[T]_B$ é triang sup.

<u>Dem.</u> Por indução sobre $\dim V =: n$.

Caso inicial: $n=1$ ✓

Hipótese de indução: suponhamos que $n>1$ e que o resultado vale para todos esps vets cxos de dim $< n$.

Passo da indução: suponhamos que $\dim V = n$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Seja λ um autovalor de T. Então $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \iff$

$T - \lambda I$ não é inj $\iff$ $T - \lambda I$ não é sobrej.

$\Rightarrow$ $U := \operatorname{im}(T - \lambda I)$, $\dim U < \dim V$.

Além disso, afirmamos que U é T-invariante.

De fato, se $u \in U$, então

$$Tu = \underbrace{(T - \lambda I)u}_{\in U} + \underbrace{\lambda u}_{\in U} \in U.$$

Agora temos $T|_U \in \mathcal{L}(U)$. Pela hip de indução, existe uma base B_U: $u_1, \dots, u_m$ de U t.q.

$[T|_U]_{B_U}$ é triang sup.

$$Tu_j = (T|_U)u_j \underset{(5.26)}{\in} \operatorname{span}(u_1, \dots, u_j) \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Completamos B_U a uma base $B: u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k$ de V. Para cada $i = 1, \ldots, k$, temos:

$$Tv_i = \underbrace{(T - \lambda I) v_i}_{\in U = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m)} + \lambda v_i$$

$$\Rightarrow Tv_i \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_i)$$

Por (5.26), $[T]_B$ é triang sup //.

5.30 Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(V)$, B base de V e $[T]_B$ é triang sup. Então T é invertível

$\Leftrightarrow$ Cada coeficiente diagonal de $[T]_B$ é não-nulo.

<u>Dem</u>. $B: v_1, \ldots, v_n$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cancel{*} \\ & \lambda_j = 0 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$

$$Tv_1 = \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} v_1 \Rightarrow T\left(\frac{1}{\lambda_1} v_1\right) = v_1 \Rightarrow v_1 \in \operatorname{im} T$$

$$Tv_2 = a v_1 + \underbrace{\lambda_2}_{\neq 0} v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\lambda_2}(Tv_2 - a v_1)$$

$$\Rightarrow v_2 = \underbrace{T\left(\frac{1}{\lambda_2}v_2\right)}_{\in \operatorname{im} T} - \underbrace{\frac{a}{\lambda_2}}_{\in \operatorname{im} T} v_1 \in \operatorname{im} T$$

Seguindo desta maneira, mostramos que

$\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_n}_{\text{base de } V} \in \operatorname{im} T \Rightarrow \operatorname{im} T = V \Rightarrow T$ é sobrej

$\Rightarrow T$ é invertível

$(\Rightarrow)$ Suponhamos T invertível.

Temos $\lambda_1 \neq 0$, pois se $\lambda_1 = 0$, então

$Tv_1 = \lambda_1 v_1 = 0 v_1 = 0 \Rightarrow v_1 \in \ker T$ ↯.

Suponhamos, por absurdo, que $\lambda_j = 0$ para algum $j = 2, \dots, n$. Pela forma triang de $[T]_B$:

$$Tv_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$$

$$\Rightarrow T(\underbrace{\operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)}_{\dim j}) \subset \underbrace{\operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1})}_{\dim j-1}$$

$\Rightarrow \exists v \overset{\neq 0}{} \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$ t.q. $Tv = 0$

$\Rightarrow T$ não é inj $\Rightarrow T$ não é invertível ↯

Logo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ //

5.32 Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(V)$, B base de V e $[T]_B$ é triangular superior. Então os coeficientes diagonais de $[T]_B$ são exatamente os autovalores de T.

<u>Dem.</u> $B: v_1, \dots, v_n$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ é autovalor de $T \Leftrightarrow T - \lambda I$ não é invertível. (1)

$$[T - \lambda I]_B = [T]_B - \lambda I$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

é triang sup Por (5.31):

$T - \lambda I$ não é invertível $\Leftrightarrow$ Algum dentre $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda$ é zero (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ (λ é autovalor de $T \Leftrightarrow \lambda = \lambda_j$ para algum $j = 1, \dots, n$)

Ou seja, os autovalores de T são

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$. //

Ex. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ $\quad T(x,y,z) = (2x+y, 5y+3z, 8z)$

B = can

$T(1,0,0) = (2,0,0)$
$T(0,1,0) = (1,5,0)$
$T(0,0,1) = (0,3,8)$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

é triang sup

$\therefore$ Autovalores de T : 2, 5, 8

$\boxed{\lambda = 2}$ $\quad [T - 2I]_{can} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$\ker(T - 2I) = \operatorname{span}(1,0,0)$ LI

$\boxed{\lambda = 5}$ $\quad [T - 5I]_{can} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-3x + y = 0$

$3z = 0$

$z=0, \quad y=3x \qquad \ker(T-5I) = \text{span}(1,3,0)$

$\boxed{\lambda=8} \quad [T-8I]_{can} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -6x + y &= 0 \\ -3y + 3z &= 0 \end{aligned}$

$z = y = 6x$

$\ker(T-8I) = \text{span}(1,6,6)$

Notemos que $\tilde{B}$: $\underbrace{(1,0,0), (1,3,0), (1,6,6)}$ é LI

e, assim, uma base de $\mathbb{R}^3$.

Pois estão associados a autovalores distintos

$[T]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$