27/01/22

CAPÍTULO 5:

AUTO-VALORES E AUTO-VETORES

Objetivo: investigar a estrutura dos operadores lineares $T \in \mathcal{L}(V)$, onde V é um espaço vetorial de dim finita.

<u>Ex.</u> $T = 0$, I são operadores "simples".

$T = \lambda I \quad \lambda \in \mathbb{F}$ também

Dado $T \in \mathcal{L}(V)$:

$\exists\, U \subset V$ subespaço t.q. $T(U) \subset U$?

Neste caso, podemos restringir $T : V \to V$

a $T|_U : U \to U$.

5.2 <u>Def</u> [SUBESPAÇO INVARIANTE]

Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Um <u>subespaço</u> <u>invariante</u> <u>sob</u> T é um subespaço U de V t.q. $Tu \in U$, $\forall u \in U$, ou seja, $T(U) \subset U$.

5.3 <u>Exs.</u> Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Então são subespaços invariantes sob T:

- $\{0\}$ $\because$ $T(0) = 0$.
- V
- $\ker T$ $\because$ $u \in \ker T \Rightarrow Tu = 0 \in \ker T$
- $\operatorname{im} T$ $\because$ $v \in \operatorname{im} T \Rightarrow v = Tu \Rightarrow Tv = T(Tu) \in \operatorname{im} T$

5.4 $V = P(\mathbb{R})$ $\quad D \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$ $\quad Dp = p'$

$\Rightarrow U = P_m(\mathbb{R})$ é um subespaço invariante por D.

—n—

Subespaços invariantes de dim 1

Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponhamos que U é um subespaço T-invariante de dim 1. Então

$$U = \operatorname{span}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$$

para algum $v \in U$ fixado, $v \neq 0$.

Como U é T-invariante,

$Tv \in U \Rightarrow \boxed{Tv = \lambda v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Reciprocamente, se $v \in V$ é um vetor não-nulo t.q $\underset{\sim}{Tv = \lambda v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$, então

$$U := \operatorname{span}(v)$$

será T-invariante, pois os elementos de U são da forma μv, $\mu \in \mathbb{F}$, e $T(\mu v) = \mu Tv = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in U$.

$\therefore$ Subespaços T-invariantes de dim 1 $\longleftrightarrow$ Vetores $v \in V$ não-nulos com $Tv = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$

5.5 <u>Def</u>. [AUTOVETOR / VETOR CARACTERÍSTICO / VETOR PRÓPRIO] Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Diremos que $v \in V$, $v \neq 0$, é um <u>autovetor</u> de T se $\exists \lambda \in \mathbb{F}$ t.q. $\boxed{Tv = \lambda v}$. Neste caso, diremos que λ é um <u>autovalor</u> de T (<u>associado</u> a v).

5.6 Suponhamos que $\dim V < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Seja $\lambda \in \mathbb{F}$. Então as seguintes asserções são equivalentes:

(a) λ é um autovalor de T.

(b) $T - \lambda I$ não é injetora.

(c) $T-\lambda I$ não é sobrejetora.

(d) $T-\lambda I$ não é invertível.

__Dem.__ (b), (c) e (d) são equivalentes (3.69)

(a) $\Leftrightarrow \exists\, v \in V,\ v \neq 0,\ Tv = \lambda v$

$$\Updownarrow$$

$$(T-\lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(T-\lambda I)$$

(a) $\Leftrightarrow \ker(T-\lambda I) \neq \{0\} \Leftrightarrow$ (b) //.

5.8 __Ex.__ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$, $T(x,y) = (-y,x)$

Investigar a existência de autovalores do T.

__Resolução.__ $\underbrace{T(x,y)}_{} = \lambda(x,y)$ (*) $\lambda = ?$

$= (-y,x)$

$$\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \qquad -y = \lambda(\lambda y)$$

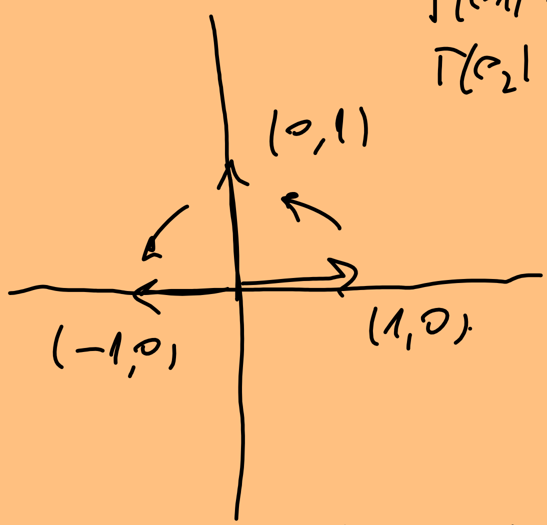
$$(\lambda^2+1)y = 0$$

$\mathbb{F}=\mathbb{R}$	$\mathbb{F}=\mathbb{C}$
$\lambda^2+1 \neq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$
$\Rightarrow \boxed{y=0}$ $\boxed{x=0}$	__$\lambda = i$__ $x = iy$
$(0,0)$ é a única solução de (*), mas o vetor nulo	$V_i = \{(iy,y) \mid y \in \mathbb{C}\}$ é o espaço solução

não é considerado como autovetor. Isto significa que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ não admite auto-valores e nem autovetores.

$$T(x,y) = (-y, x)$$

$T(e_1) = e_2$
$T(e_2) = -e_1$



T é uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

$U_i = \text{span}\,(i, 1)$

$(i,1)$ é um autovetor de T com autovalor i

$$T(i,1) = (-1, i) = i(i,1)$$

$\underline{\lambda = -i}$ $\quad x = -iy$

$$U_{-i} = \{(-iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\} = \text{span}\,(-i, 1)$$

$(-i,1)$ é autovetor de T com autovalor $-i$

$$T(-i,1) = (-1,-i) = (-i)(-i, 1)$$

<u>Obs</u>. $(i,1), (-i,1)$ autovetores de T formam uma base de $\mathbb{C}^2$.

— n —

5.10 Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Sejam $v_1, \dots, v_m$ autovetores de T associados resp. a autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são 2 a 2 distintos, então $v_1, \dots, v_m$

é L.I.

<u>Dem</u>. Suponhamos, por absurdo, que $v_1, \dots, v_m$ é L.D.

Pelo Lema da Dep Linear, $\exists\ j = 1, \dots, m$ t.q.

$$v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1}).$$

Tomaremos j o menor inteiro possível satisfazendo isso. Então $\exists\ a_1, \dots, a_{j-1} \in \mathbb{F}$ t.q.

$$v_j = a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{T v_j}_{= \lambda_j v_j} = a_1 \underbrace{T v_1}_{= \lambda_1 v_1} + \dots + a_{j-1} \underbrace{T v_{j-1}}_{= a_{j-1} v_{j-1}}$$

$$\lambda_j v_j = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_{j-1} \lambda_{j-1} v_{j-1} \quad (2)$$

Fazendo $\lambda_j \times (1) - (2)$, obtemos:

$$0 = a_1 (\lambda_j - \lambda_1) v_1 + \dots + a_{j-1} (\lambda_j - \lambda_{j-1}) v_{j-1}.$$

Pela escolha de j, $v_1, \dots, v_{j-1}$ é L.I.

$$\Rightarrow a_1 \underbrace{(\lambda_j - \lambda_1)}_{\neq 0,\ \text{por hip}} = \dots = a_{j-1} \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{j-1})}_{\neq 0,\ \text{por hip.}} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_{j-1} = 0$$

Voltando à (1), tiramos que $v_j = 0$, mas isso contradiz o fato de v_j ser um autovetor de T //.

5.13 <u>Cor</u>. Suponhamos que $\dim V < \infty$ e $\dim V = n$, e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Então T tem no máximo n autovalores.

—n—

Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e seja U um subespaço T-inv. de V. Então:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \\ U \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, dashed] & U \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

$T|_U \in \mathcal{L}(U)$

$(T|_U)u := Tu \quad \forall u \in U$

i.e. $T|_U = T \circ i$

$T|_U$ ← <u>restrição</u> de $T \in \mathcal{L}(V)$ a U

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/U \arrow[r, dashed] & V/U \end{tikzcd}$$

$T/U \in \mathcal{L}(V/U)$

$$(T/U)(\underbrace{v+U}_{=\pi(v)}) := \underbrace{Tv + U}_{=\pi(Tv)}$$

T/U ← <u>quociente</u> de T por U

$$T/U \circ \pi = \pi \circ T$$

$$w + U = v + U \Rightarrow w - v \in U \underset{U \text{ é } T\text{-inv}}{\Longrightarrow} T(w-v) \in U$$

$$\Rightarrow Tw - Tv \in U \Rightarrow Tw + U = Tv + U$$

5.15 <u>Ex</u> $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$, $T(x,y) = (y,0)$

$U = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{F}\}$ $\qquad [T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Mostrar que U é T-invariante e calcular $T|_U$

$T(x,0) = \underline{\underline{(0,0)}} \in U \quad \therefore \quad T(U) \subset U$ ✓

e $T|_U = 0$

(b) Mostrar que $\nexists\, W$ subespaço de $\mathbb{F}^2$ que é T-inv. e satisfaz $W \oplus U = \mathbb{F}^2$

Suponhamos que W é subespaço de $\mathbb{F}^2$ com

$\underset{\text{dim } 1}{W \oplus U} = \underset{\text{dim } 2}{\mathbb{F}^2} \Rightarrow \dim W = 2 - 1 = \underline{1}$.

Se W fosse T-inv, todo vetor não-nulo de W seria um autovetor de T. Calculemos os autovalores de T.

$$\underbrace{T(x,y)}_{=(y,0)} = \lambda(x,y) \qquad \begin{cases} y = \lambda x \\ 0 = \lambda y \end{cases}$$

<u>1.º caso</u> $\lambda \neq 0$

$\lambda y = 0 \Rightarrow y = 0$

e

$y = \lambda x \Rightarrow \lambda x = 0 \Rightarrow x = 0$

Mas $(0,0)$ não é autovetor de T

<u>2º caso</u> $\lambda = 0$

$$\begin{cases} y = \lambda x \Rightarrow y = 0 \text{ e } x \text{ é arbitrário} \\ 0 = \lambda y \end{cases}$$

$(x,0)$ são os autovetores de T com autovalor $\underline{\underline{0}}$

$x \in \mathbb{F}$

$U = \ker T = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{F}\}$: autovetores de T

T admite um único autovalor $\lambda = 0$

Logo W não pode ser T-invariante.

(c) $T/U \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2/U) = ?$

$$\begin{aligned}(T/U)((x,y)+U) &= T(x,y) + U \\ &= (y,0) + U \\ &= U \qquad\qquad (y,0) \in U \\ &= 0 + U\end{aligned}$$

$\therefore T/U = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2/U)$ //