Já vimos: 24/01/22

Bases B_V de V, B_W de W, então $\mathcal{M} : \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow M(m \times n, \mathbb{F})$

$$T \longmapsto [T]^{B_V}_{B_W}$$

$m = \dim W$
$n = \dim V$

é um isomorfismo.

Além disso:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend right, "ST"'] & V \arrow[r, "T"] & W \end{tikzcd} \Rightarrow [ST]^{B_U}_{B_W} = [S]^{B_U}_{B_V} \cdot [T]^{B_V}_{B_W}$$

—//—

Hoje: Seja $v \in V$. Então, sendo $B_V : v_1, \ldots, v_n$, podemos escrever $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ para únicos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$. Dado $T \in \mathcal{L}(V,W)$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \Rightarrow Tv = \sum_{j=1}^{n} x_j Tv_j \qquad (1)$$

$[T]_{B_W}^{B_V} = A = (a_{ij})$ significa que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i . \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem que:

$$Tv = \sum_{j=1}^{n} x_j \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \right] = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right] w_i \qquad (3)$$

Sendo $x_1, \ldots, x_n$ as coordenadas de v na base B_V, escrevemos

$$[v]_{B_V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow [Tv]_{B_W} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [Tv]_{B_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A [v]_{B_V}$$

$$\therefore \boxed{[Tv]_{B_W} = [T]_{B_W}^{B_V} \cdot [v]_{B_V}}$$

Ex. $D \in \mathcal{L}(P_3(\mathbb{R}))$, $Dp = p'$

$V = W = P_3(\mathbb{R})$ $\quad B_V = B_W : 1, x, x^2, x^3$

$$[D]^{B_V}_{B_V} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad a_j \in \mathbb{R}$

$$[p]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow [Dp]_{B_V} = [D]^{B_V}_{B_V} [p]_{B_V}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [Dp]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array}$$

$$\Rightarrow Dp = a_1 \cdot 1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$
$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

— " —

$V = W \quad \mathcal{L}(V, V) =: \mathcal{L}(V)$

Elementos de $\mathcal{L}(V)$: operadores lineares

Exs

- $M_{x^2} \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ é injetora, mas não é sobrejetora.
- Backward shift $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$ é sobrejetor, mas não é injetor.

Notemos que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{F}^\infty$ são espaços vetoriais de dimensão infinita. Por outro lado:

3.69 Suponhamos que $\dim V < \infty$. Então as seguintes asserções para $T \in \mathcal{L}(V)$ são equivalentes:

(a) T é invertível.

(b) T é injetor.

(c) T é sobrejetor.

Dem. (a) $\Rightarrow$ (b)

T invertível $\Leftrightarrow$ T é bijetor $\Rightarrow$ T injetor

(b) $\Rightarrow$ (c) T.F.A.L.:

$\dim \operatorname{im} T = \dim V - \dim \underbrace{\ker T}_{=\{0\} \text{ por (b)}}$

$= \dim V$

$\Rightarrow \operatorname{im} T = V \Rightarrow T$ sobrejetora.

(c) $\Rightarrow$ (a) T.F.A.L.:

$\dim \ker T = \dim V - \dim \underbrace{\operatorname{im} T}_{=V \text{ (por (c))}}$

$= 0$

$\Rightarrow \ker T = \{0\} \Leftrightarrow T$ injetora

T já era sobrej (p/ hip) $\Rightarrow T$ bijetora

$\Rightarrow T$ invertível //

3.70 Ex. Mostrar que $\forall q \in P(\mathbb{R})$

$\exists\, p \in P(\mathbb{R})$ t.q. $((x^2+5x+7)\,p(x))'' = q(x)$.

Resolução. Dado $q \in P(\mathbb{R})$, $\exists\, m$ t.q. $q \in P_m(\mathbb{R})$.

Seja $T \in \mathcal{L}(P_m(\mathbb{R}))$,

$(Tp)(x) = ((x^2+5x+7)\,p(x))''$.

Queremos ver que T é sobrejetora.

Primeiramente, notemos que T está bem definida:

$$\deg \Big[\underbrace{\underbrace{(x^2+5x+7)}_{\deg = 2} \underbrace{p(x)}_{\deg \leq m}}_{\deg \leq m+2} \Big]'' \leq (m+2)-2 = m$$

T é linear $\therefore$ $T = D^2 \circ M_{x^2+5x+7}$

Por 3.69, é suficiente ver que T é injetora.

$$p \in \ker T \iff \big((x^2+5x+7)\,p(x)\big)'' = 0$$

$$\iff \underbrace{(x^2+5x+7)\,p(x)}_{\substack{\deg \geq 2 \\ \text{se não for o polinômio nulo}}} = \underbrace{ax+b}_{\deg < 2}$$

$$\iff p = 0$$

$\therefore \ker T = \{0\}$ $\therefore$ T é inj //

FIM de §3.D

§ 3.E PRODUTOS E QUOCIENTES

Def. Sejam $V_1, \ldots, V_m$ esps vets / $\mathbb{F}$.

O <u>produto</u> $V_1 \times \dots \times V_m$ é o espaço vetorial / $\mathbb{F}$ com as operações componente a componente:

$$\begin{cases} (u_1, \dots, u_m) + (v_1, \dots, v_m) = (u_1+v_1, \dots, u_m+v_m) \\ \lambda (v_1, \dots, v_m) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m) \end{cases}$$

Vetor <u>nulo</u> $0 = (0, \dots, 0)$

<u>oposto</u> $-(v_1, \dots, v_m) = (-v_1, \dots, -v_m)$

<u>Ex</u>. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \{ (v_1, v_2) \mid v_1 \in \mathbb{R}^2, v_2 \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \{ ((x_1, x_2), (x_3, x_4, x_5)) \mid x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R} \}$

$\overset{?}{=} \{ (x_1, \dots, x_5) \mid x_1, \dots, x_5 \} = \mathbb{R}^5$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^5$???

3.76 Suponhamos $V_1, \dots, V_m$ de dim finita

Então

$$\dim (V_1 \times \dots \times V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m$$

<u>Dem</u>. Uma base de $V_1 \times \dots \times V_m$ é formada pela "justaposição" de bases de $V_1, \dots, V_m$, nesta ordem.

3.77 Produtos × Somas diretas

Sejam $U_1, \ldots, U_m$ subespaços de V. Definamos

$\Gamma: U_1 \times \ldots \times U_m \to U_1 + \ldots + U_m$

$$\Gamma(u_1, \ldots, u_m) = u_1 + \ldots + u_m \text{ (soma em } V)$$

Então $U_1 + \ldots + U_m$ é soma direta $\Leftrightarrow$ Γ é injetora.

__Dem.__ Γ é injetora $\Leftrightarrow$ $\ker \Gamma = \{0\}$

$(u_1, \ldots, u_m) \in \ker \Gamma$ ..

$\Rightarrow \Gamma(u_1, \ldots, u_m) = u_1 + \ldots + u_m = 0$

A soma é direta $\Leftrightarrow$ A única maneira de escrever 0 como soma de elementos de $U_1, \ldots, U_m$ é $0 + \ldots + 0$.

$\Leftrightarrow \ker \Gamma = \{(0, \ldots, 0)\}$ //.

Γ é sobrejetora por construção.

__Cor.__ Se $U_1 + \ldots + U_m$ é soma direta, então Γ é isomorfismo e assim

$$\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_m) = \dim(U_1 \times \dots \times U_m)$$
$$= \dim U_1 + \dots + \dim U_m.$$

— 7 —

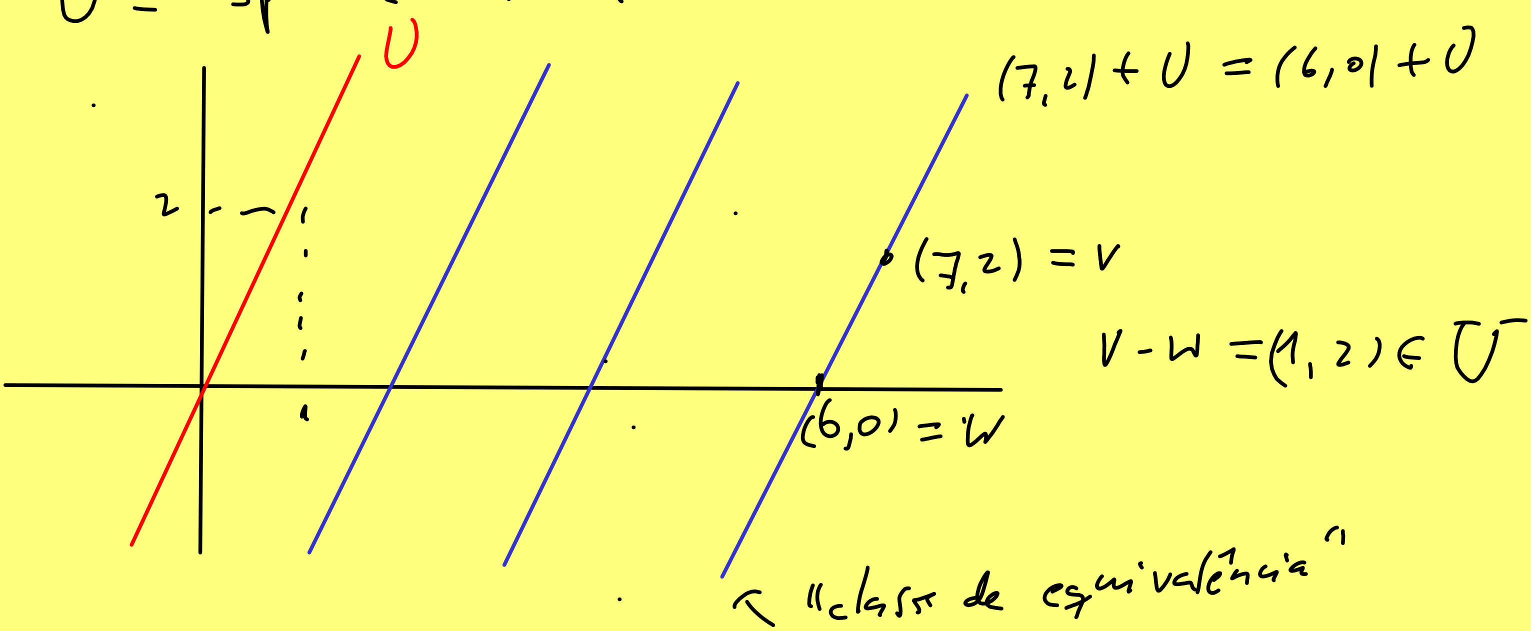
Seja V um esp. vet. e seja U um subesp de V. Seja $v \in V$. Chamamos o cj.

$$v + U := \{ v + u \mid u \in U \}$$

o <u>subespaço</u> <u>afim</u> de V, passando por v, e paralelo a U.

<u>Ex</u> $V = \mathbb{R}^2$

$U = \operatorname{span}(1,2) = \{ (x, 2x) \mid x \in \mathbb{R} \}$



3.83 <u>Def.</u> O <u>quociente</u> V/U é o cj. de todos os subespaços afins de V paralelos a U:

$$V/U = \{ \underbrace{v+U}_{=[v] \text{ ou } \bar{v}} \mid v \in V \}$$

3.85 São equivalentes:

(a) $v - w \in U$

(b) $v + U = w + U$

(c) $(v+U) \cap (w+U) \neq \emptyset$.

<u>Dem.</u> (a) ⇒ (b)

$$v+U = \{ v+u \mid u \in U \}$$
$$= \{ w + (\underbrace{v-w+u}_{\in U}) \mid u \in U \}$$
$$\subset w + U$$

$\Rightarrow v+U \subset w+U$. Analogamente $w+U \subset v+U$.

$\therefore v+U = w+U$

(b) ⇒ (c) ✓

(c) ⇒ (a) Suponha $(v+U) \cap (w+U) \neq \emptyset$, existem $u_1, u_2 \in U$ t.q. $v + u_1 = w + u_2$

$\Rightarrow v - w = u_2 - u_1 \in U$ //.

3.86 [ESTRUTURA DE ESP VET EM V/U]

- $(v + U) + (w + U) := (v + w) + U$
- $\lambda (v + U) := (\lambda v) + U$

A definição é boa?

Se $v + U = v' + U$ e $w + U = w' + U$ então $(v+w) + U \overset{?}{=} (v' + w') + U$

$\Downarrow$ 3.85

$v - v' \in U$ e $w - w' \in U$

$\Downarrow$ U é subesp

$\underbrace{v - v' + w - w'}_{= (v+w) - (v'+w')} \in U \underset{3.85}{\Rightarrow} (v+w) + U = (v'+w') + U$

Analogamente $v + U = v' + U \Rightarrow (\lambda v) + U = (\lambda v') + U$

3.87 V/U com essas operações se torna

um esp. vetorial.

Por ex.: $0+U=U$ é o elemento neutro de V/U

- $(v+U)+(w+U) = (v+w)+U$
$$= (w+v)+U$$
$$= (w+U)+(v+U) \quad \text{etc.}$$

3.88 $\pi : V \to V/U$ <u>aplicação</u> <u>quociente</u>

$$v \mapsto v+U$$

é sobrejetora (por construção).

$v \in \ker \pi \Leftrightarrow \pi(v) = 0 \Leftrightarrow v+U = 0+U$

$\overset{3.85}{\Leftrightarrow}$ $v-0 \in U \Leftrightarrow v \in U \quad \therefore \ker \pi = U$

3.89 $\pi : V \to V/U$

T.F.A.L.: $\dim V = \dim \ker \pi + \dim \operatorname{im} \pi$
$$= \dim U + \dim V/U$$

$\therefore \dim V/U = \dim V - \dim U$ //

§3.C, Ex.2

$D \in \mathcal{L}(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$, $Dp = p'$

Determinar bases B, B' de $P_3(\mathbb{R})$, $P_2(\mathbb{R})$ t.q.

$$[D]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dem.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & x^2 & x^3 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$D(1) = 0$

$D(x) = 1$

$D(x^2) = 2x$

$D(x^3) = 3x^2$

Tomemos $B: x, x^2, x^3, 1$ ←

$B': 1, 2x, 3x^2$ ← l.I.? Dem.

$\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$ $\quad$ Compr$(B') = 3$

$$a(1) + b(2x) + c(3x^2) = 0$$

$$\Rightarrow a.1 + (2b)x + (3c)x^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c = 0$$

//

Ex.3 $\dim V, \dim W < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$

$\Rightarrow \exists$ bases B_V, B_W de V, W t.q.

$$[T]^{B_V}_{B_W} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\hphantom{1 \ \ddots \ 1}}_{\dim \operatorname{im} T}$