§2.C DIMENSÃO

17/01/22

$\dim \mathbb{F}^n = n$?

Todo espaço vetorial de dimensão finita admite uma base. ✓.

$\dim V \overset{def}{=}$ comprimento de uma base de V

(V tem dim finita)

2.35 Todas as bases de V (dim finita) têm o mesmo comprimento.

Dem. Usaremos 2.23:

Compr lista LI em V $\leq$ Comp lista geradora de V

Se B_1 e B_2 são duas bases de V, então

B_1: LI, gera V

B_2: LI, gera V

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ LI}, \ \operatorname{Span}(B_2) = V \overset{2.23}{\Rightarrow} \operatorname{Comp}(B_1) \leq \operatorname{Compr}(B_2) \\ B_2 \text{ LI}, \ \operatorname{Span}(B_1) = V \overset{2.23}{\Rightarrow} \operatorname{Compr}(B_2) \leq \operatorname{Compr}(B_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Compr}(B_1) = \operatorname{Compr}(B_2)$$

//

Exs. • $(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)$

base canônica de $\mathbb{F}^n$ $\Rightarrow \dim \mathbb{F}^n = n$

• $1, z, \dots, z^m$ base canônica de $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$

$\Rightarrow \dim P_m(\mathbb{F}) = m+1.$

2.38 Se V tem dim finita e U é um subespaço de V, então U tem dim finita e $\dim U \leq \dim V$.

<u>Dem.</u> Sejam B_U e B_V bases de $\overset{2.26}{U}$ e V, resp.

B_U é uma lista LI em V

B_V gera V

$\overset{2.23}{\Longrightarrow}$ $\text{Compr}(B_U) \leq \text{Compr}(B_V)$

$\therefore \dim U \leq \dim V$ //

Suponhamos que $\dim V = n$.

2.39 B lista L.I. em V
$\text{Compr}(B) = n$ $\Rightarrow B$ é base de V.

<u>2.42</u> B gera V
$\text{Compr}(B) = n$ $\Rightarrow B$ é base de V.
Usa 2.31

<u>Dem de 2.39.</u> B lista LI em V.

Sabemos que B pode ser estendida a uma base B' de V (por 2.33).

B' base de $V \Rightarrow \text{Compr}(B') = \dim V = n = \text{Compr}(B)$

$\Rightarrow B'$ é a extensão trivial de B, ou seja, $B' = B$

$\therefore B$ já era base de V //

—//—

2.43 Se U_1 e U_2 são subespaços de um espaço vetorial de dim finita, então

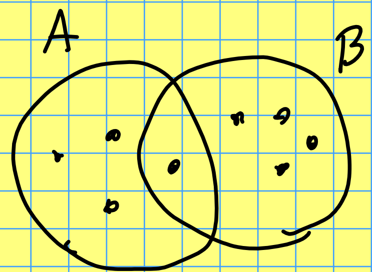
$$\boxed{\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

Em part, se $U_1+U_2 = U_1 \oplus U_2$ é uma soma direta:

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

—//—

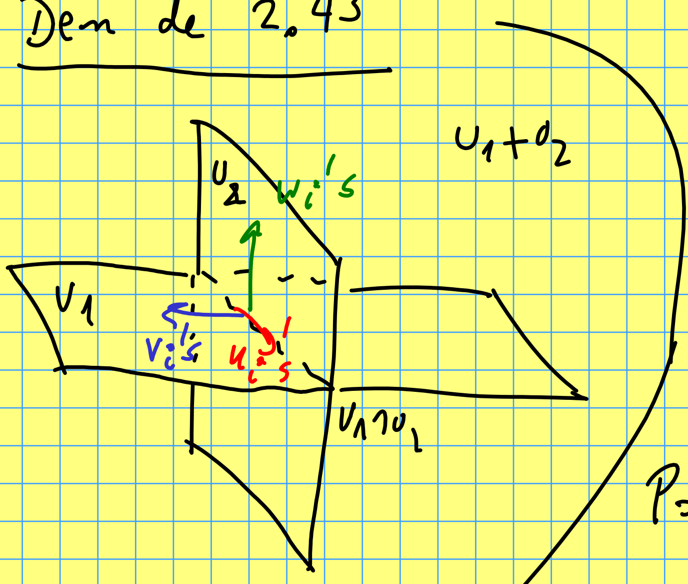
A, B conjuntos finitos



$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

—//—

Dem de 2.43



Seja $u_1, \dots, u_m$ uma base de $U_1 \cap U_2$. Então $\dim(U_1 \cap U_2) = m$.

$u_1, \dots, u_m$ vetores LI em U_1

Podemos completar essa lista a uma base

$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j$

de U_1 (por (2.33)). Agora $\dim U_1 = m+j$.

Podemos também completar $u_1, \dots, u_m$ a uma base $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k$ de U_2.

Mostraremos que

$$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k$$

é uma base de $U_1 + U_2$ (*). Seguirá disso que:

$$\begin{aligned} \dim(U_1+U_2) &= m + j + k \\ &= (m+j) + (m+k) - m \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2). \end{aligned}$$

Verificação de (*):

$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k) \supset \operatorname{span}(\underbrace{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j}_{\text{base de } U_1}) = U_1$$

$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k) \supset \operatorname{span}(\underbrace{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k}_{\text{base de } U_2}) = U_2$$

Como esse span é um subespaço,

$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k) = U_1 + U_2 \quad \checkmark$$

Seja agora

$$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 v_1 + \dots + b_j v_j + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = 0 \quad (*)$$

uma relação linear.

$$\underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_k w_k}_{\in U_2} = \underbrace{-a_1 u_1 - \dots - a_m u_m - b_1 v_1 - \dots - b_j v_j}_{\in U_1}$$

$\Rightarrow c_1w_1 + \dots + c_kw_k \in U_1 \cap U_2$

Como $u_1, \dots, u_m$ é uma base de $U_1 \cap U_2$, podemos escrever

$$c_1w_1 + \dots + c_kw_k = d_1u_1 + \dots + d_mu_m$$

para alguns $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow c_1w_1 + \dots + c_kw_k - d_1u_1 - \dots - d_mu_m = 0$

é uma rel. linear.

$u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k$ é base de U_2, logo LI

$\Rightarrow \underbrace{c_1 = \dots = c_k} = d_1 = \dots = d_m = 0.$

Voltando a $(\star)$, temos:

$$a_1u_1 + \dots + a_mu_m + b_1v_1 + \dots + b_jv_j = 0$$

Mas $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j$ base de U_1 $\therefore$ LI

$\Rightarrow \underbrace{a_1 = \dots = a_m = b_1 = \dots = b_j = 0}$

Logo $(\star)$ é uma relação linear trivial

$\therefore$ $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k$ é LI //

—n—

2.40 Ex. A lista $(5,7), (4,3)$ é uma base de $\mathbb{F}^2$.

De fato, a lista é LI, pois nenhum vetor é múltiplo do outro:

$$\to \begin{cases} 5 = \lambda . 4 \\ 7 = \lambda . 3 \end{cases}$$ não tem solução em λ.

$\mathrm{Compr}((5,7),(4,3)) = 2 = \dim \mathbb{F}^2$, segue que a lista é uma base de $\mathbb{F}^2$.

2.41 Mostrar que $1, (x-5)^2, (x-5)^3$ é uma base do subespaço

$$U = \{ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p'(5) = 0 \}$$

de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Resolução. • U é um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (Verifiquem!)

• $1, (x-5)^2, (x-5)^3 \in U$.

$$((x-5)^2)' = 2(x-5)\Big|_{x=5} = 0$$

$$((x-5)^3)' = 3(x-5)^2\Big|_{x=5} = 0$$

• Mostremos que a lista é L.I.

Consideremos uma relação linear

$$a.1 + b\cancel{(x-5)}^2 + c\cancel{(x-5)}^3 = 0.$$

Expandindo o membro do lado esquerdo,

o monômio de grau máximo é cx^3

$\Rightarrow$ $c = 0$. Agora o monômio de grau 2 é

bx^2. $\Rightarrow$ $b = 0$ $\Rightarrow$ $a = 0$ ✓

Agora $1, (x-5)^2, (x-5)^3$ tem compr. 3 e é LI

em U $\Rightarrow$ $\dim U \geq 3$

$$\left.\begin{array}{l} U \text{ é subespaço de } P_3(\mathbb{R}) \\ \dim P_3(\mathbb{R}) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim U \leq 4.$$

Verifiquemos agora que não pode ser $\dim U = 4$.

Se $\dim U$ fosse 4, então uma base de U teria compr 4. Mas essa base seria uma lista LI em $P_3(\mathbb{R})$ e de compr igual à $\dim P_3(\mathbb{R})$, logo ela seria também uma base de $P_3(\mathbb{R})$ (por (2.39)). Então teríamos uma base comum a U e $P_3(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $U = P_3(\mathbb{R})$, o que sabemos não é verdade. Logo $\dim U = 3 =$ Comprimento de $1, (x-5)^2, (x-5)^3$

$\therefore$ $1, (x-5)^2, (x-5)^3$ é base de U //

Obs. Foi usado em 2.41:

V tem dim finita
U é subespaço de V
$$\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$$

Dem. Sabemos que U tem dim finita.
Seja B uma $\underbrace{\text{base}}$ de U. Então B é LI em V
e $\quad \text{Compr}(B) = \dim U = \dim V$

Por (2.39) $\therefore$ B é base de V

$$\Rightarrow V = \text{span}(B) = U \quad //$$

—//—

Exercício 10, § 2.A

Suponhamos $v_1, \ldots, v_m$ LI em V e $w \in V$.
Mostre que se $v_1 + w, \ldots, v_m + w$ é LD então
$w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Resolução. Por hipótese, $\exists$ rel. linear

$$a_1(v_1 + w) + \cdots + a_m(v_m + w) = 0$$

onde nem todos $a_1, \ldots, a_m$ são nulos. (1)

$$\Rightarrow \underbrace{(a_1 + \cdots + a_m)}_{:= b} w = -a_1 v_1 - \cdots - a_m v_m \quad (2)$$

Se mostrarmos que $b \neq 0$, então teremos

$$w = -\frac{a_1}{b} v_1 - \dots - \frac{a_m}{b} v_m \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m),$$

como desejado.

De fato, não podemos ter $b = 0$, pois se $b = 0$ então, de (2),

$$0 = -a_1 v_1 - \dots - a_m v_m$$

onde nem todos $a_1, \dots, a_m$ são nulos, por (1), o que dá uma rel. linear entre $v_1, \dots, v_m$ e contradiz a hipótese de que $v_1, \dots, v_m$ é LI //