MAT2219 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 5 – 02/05/2016

Prof. Claudio Gorodski

Primeira parte

1. Verificar o teorema de Green onde C é o círculo de raio R centrado na origem ou o triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e:

a. $P = 0$, $Q = x$ para o círculo;

b. $P = 0$, $Q = x^2 y$ para o círculo;

c. $P = x^2 y$, $Q = 0$ para o círculo;

d. $P = x$, $Q = 0$ para o triângulo;

e. $P = y$, $Q = 0$ para o triângulo;

f. $P = x^2 y$, $Q = 0$ para o triângulo.

2. Mostre que $\oint_C xy^2 dx + (x^2 y + 2x) dy$ depende apenas da área do interior Ω da curva fechada simples C.

3. Verificar o teorema de Green nos seguintes casos:

a. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$, Ω é o semi-disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

b. $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$, Ω é o quadrado com lados suportados nas retas $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$.

4. Verificar o teorema de Green para $\vec{F} = f(x)\,\vec{j}$ sobre o quadrado unitário.

5. Calcular a área da região delimitada pelo hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ usando a fórmula $\frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$. (Sugestão: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$).

6. Seja γ uma curva suave, sem auto-interseções, unindo $(1,0)$ a $(0,1)$, inteiramente contida no primeiro quadrante, que encontra os eixos coordenados apenas em $(1,0)$ e $(0,1)$, parametrizada no intervalo $[a,b]$. Considere o campo de vetores spin $\vec{S} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$. Mostre que o trabalho realizado por $\vec{S}$ ao longo de γ é igual ao dobro da área delimitada pela imagem de γ e pelos eixos coordenados.

7. Calcular ambos os membros da fórmula $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\,ds = \int\int_\Omega (P_x + Q_y)\,dxdy$ nos seguintes casos:

a. $\vec{F} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$ sobre o disco unitário.

b. $\vec{F} = xy\,\vec{i}$ sobre o quadrado unitário.

c. $\vec{F}$ é o campo radial dividido pelo módulo, sobre o disco unitário.

d. $\vec{F}$ é o campo spin dividido pelo módulo, sobre o quadrado unitário.

e. $\vec{F} = x^2 y \vec{j}$ sobre o triângulo unitário (lados $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$).

f. $\vec{F} = \text{grad}\, r$ onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre a metade superior do disco unitário.

8. Calcular o divergente do campo, e determinar uma função de fluxo ψ (resolver $\psi_y = P$, $\psi_x = -Q$) se possível, onde $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ é dado por:

a. $2xy\vec{i} - y^2\vec{j}$

b. $3xy^2\vec{i} - y^3\vec{j}$

c. $x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$

d. $y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$

e. $e^x \cos y\,\vec{i} - e^x \sin y\,\vec{j}$

f. $e^{x+y}(\vec{i} - \vec{j})$

g. $2y\,\vec{i}/x + y^2\,\vec{j}/x^2$

h. $xy\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$

9. Calcular o rotacional dos campos do Ex. 7 e determinar um potencial, quando possível.

10.

a. Seja $f(x, y)$ parte real de $(x + iy)^3$. Calcule $\vec{F} = \text{grad} f$ e $\text{div}\,\vec{F}$. Conclua que f é uma função harmônica. Calcule diretamente que $\Delta f = 0$.

b. Sendo $\vec{F}$ como em (a), determinar uma função de fluxo g para $\vec{F}$. Verifique que $g(x, y)$ pode ser a parte imaginária de $(x + iy)^3$.

c. Mostre que f e g satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

11.

a. Mostre que $f(x, y) = e^x \cos y$ é harmônica.

b. Calcular $\vec{F} = \text{grad}\, f$.

c. Calcular uma função de fluxo g para $\vec{F}$.

12. Sendo $P(x, y) = xe^{-y^2}$ e $Q(x, y) = -x^2 y e^{-y^2} + 1/(x^2 + y^2)$, calcular a integral de linha $\int P\,dx + Q\,dy$ ao longo da fronteira do quadrado de lado $2a$ determinado pelas desigualdades $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$.

13. Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ um campo de vetores contínuo. Assinalar "verdadeira" ou "falsa" para cada uma das seguintes asserções:

(a) Se $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = 0$ para um todo caminho fechado γ em Ω, então F admite uma função de fluxo em Ω.

(b) Se $\vec{F}$ é solenoidal ($\operatorname{div} \vec{F} = 0$) então $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = 0$ para um todo caminho fechado γ em Ω.

(c) Se $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = 0$ para um todo caminho fechado γ em Ω, então $\int_p^q \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = 0$ independe do caminho em Ω.

(d) Se $\vec{F}$ admite uma função de fluxo, então $\vec{F}$ é solenoidal.

(e) Se $\vec{F}$ é solenoidal então $\vec{F}$ admite uma função de fluxo.

(f) Se $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = 0$ para um todo caminho fechado γ em Ω, então $\vec{F}$ é solenoidal.