Cálculo IV - Lista 7

1-) $f(z) = e^z$ é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$

$f'(z) = e^z$; $f''(z) = e^z$; $f^{(n)}(z) = e^z$

expandindo $f(z)$ em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$:

$$e^z = e^1 + e^1(z-1) + e^1\frac{(z-1)^2}{2!} + e^1\frac{(z-1)^3}{3!} + \dots$$

$$e^z = e + e\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$$

Como $f(z) = e^z$ é uma função inteira, o seu raio de convergência é infinito.

2-) a) $f(z) = \operatorname{senh} z$ $\qquad z_0 = 0$

$f'(z) = \cosh z$

$f''(z) = \operatorname{senh} z$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!} + f'''(z_0)\frac{(z-z_0)^3}{3!} + \dots$$

$$\operatorname{senh} z = 0 + 1z + 0 + 1.\frac{z^3}{3!} + 0 + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $f(z) = \operatorname{senh} z$ é uma função inteira, seu disco de convergência é infinito.

$|z| < \infty$

2-) b) $f(z) = \operatorname{senh} z \quad ; \; z_0 = \pi i$

$f'(z) = \cosh z \quad ; \; f''(z) = \operatorname{senh} z \; ; \; f'''(z) = \cosh z$

$$\operatorname{senh} z = 0 - 1(z - i\pi) + 0 - 1\frac{(z-i\pi)^3}{3!} + 0 - 1\frac{(z-i\pi)^5}{5!} + \ldots$$

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(z-i\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $f(z) = \operatorname{senh} z$ é uma função inteira, seu disco de convergência é infinito

$$|z - i\pi| < \infty$$

c) $f(z) = \cos z \quad ; \; z_0 = \frac{\pi}{2}$

$f'(z) = -\operatorname{sen} z \quad ; \; f''(z) = -\cos z \; ; \; f'''(z) = \operatorname{sen} z$

$$\cos z = 0 - 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + 1\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + 0 - 1\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $f(z) = \cos z$ é uma função inteira, seu disco de convergência é infinito

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $\left|z - \frac{\pi}{2}\right| < \infty$

d) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2} \quad ; \; z_0 = 0$

$$\cos z = 1 + 0 - 1\frac{z^2}{2!} + 0 + \frac{1 \cdot z^4}{4!} + 0 - \frac{1 z^6}{6!} + \ldots$$

$$1 - \cos z = + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \ldots$$

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \ldots$$

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!}$$

Como $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ é uma função inteira, seu disco de convergência é infinito.

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $|z| < \infty$

e) $f(z) = \operatorname{sen} z^2 \quad ; z_0 = 0$

$$\operatorname{sen} z = 0 + 1z + 0 - 1\frac{z^3}{3!} + 0 + 1\frac{z^5}{5!} + 0 - 1\frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{sen} z^2 = z^2 - \frac{(z^2)^3}{3!} + \frac{(z^2)^5}{5!} - \frac{(z^2)^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{sen} z^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Como $f(z) = \operatorname{sen} z^2$ é uma função inteira, seu raio de convergência é infinito.

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $|z| < \infty$

f) $f(z) = \frac{1}{z^2} \quad ; z_0 = 1$

$f'(z) = \frac{-2}{z^3} \quad ; f''(z) = \frac{+2.3}{z^4} \quad ; f'''(z) = -\frac{2.3.4}{z^5}$

$$\frac{1}{z^2} = 1 - 2(z-1) + 2.3\frac{(z-1)^2}{2!} - 2.3.4\frac{(z-1)^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n$$

Como a única singularidade de $f(z) = \frac{1}{z^2}$ é $z = 0$, o disco sendo centrado em $z_0 = 1$, e a distância até a singularidade é 1:

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $|z-1| < 1$

g) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$; $z_0=2$

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{2}{2^3}(z-2)+\frac{\cancel{2}.3}{2^4}\frac{(z-2)^2}{\cancel{2!}}-\frac{\cancel{2.3}.4}{2^5}\frac{(z-2)^3}{\cancel{3!}}+\dots$$

$$\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(z-2)^n$$

Como a única singularidade de $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ é $z=0$, sendo o disco centrado em $z_0=2$, e a distância até a singularidade é 2:

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $|z-2|<2$

h) $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$; $z_0=0$

$f'(z)=\dfrac{+2}{(1-z)^3}$; $f''(z)=\dfrac{2.3}{(1-z)^4}$; $f'''(z)=\dfrac{2.3.4}{(1-z)^5}$

$$\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+\cancel{2}.3\frac{z^2}{\cancel{2!}}+\cancel{2.3}.4\frac{z^3}{\cancel{3!}}+\dots$$

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

Como a única singularidade de $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ é $z=1$, sendo o disco centrado em $z_0=0$, e a distância até a singularidade é 1:

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $|z|<1$

i) $f(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$; $z_0 = 0$

$f'(z) = +\frac{2.3}{(1-z)^4}$; $f''(z) = \frac{2.3.4}{(1-z)^5}$; $f'''(z) = \frac{2.3.4.5}{(1-z)^6}$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = 2 + 2.3z + \cancel{2}.3.4\frac{z^2}{\cancel{2!}} + \cancel{2.3}.4.5\frac{z^3}{\cancel{3!}} + \ldots$$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)z^n$$

Como a única singularidade de $f(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$ é $z=1$, sendo o disco centrado em $z_0 = 0$, e a distância até a singularidade é 1:

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $|z| < 1$.

3-) Do exercício 2b:

$f(z) = \operatorname{senh} z$; $z_0 = \pi i$

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(z-i\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{z\to\pi i} \frac{\operatorname{senh} z}{z-\pi i} = \lim_{z\to\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(z-i\pi)^{2n}}{(2n+1)!} = -1$$

4-) Seja $g(z) = \cos z$; $z_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\cos z = 0 - 1\left(z-\frac{\pi}{2}\right) + 0 + 1\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + 0 - 1\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \ldots$$

$$\frac{\cos z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = \left[-1 + \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!} - \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!} + \ldots\right]\frac{1}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{\cos z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n+1)!} \quad ; \left|z-\frac{\pi}{2}\right| < \pi \left(\begin{array}{l}\text{distância até a singularidade}\\ \text{mais próxima}\end{array}\right)$$

Como não há potências negativas de $\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$, f é inteira em $z_0 = \frac{\pi}{2}$

Analogamente, para $z_1 = -\frac{\pi}{2}$:

$$\cos z = 0 + \left(z+\frac{\pi}{2}\right) + 0 - 1\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + 0 + 1\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \dots$$

$$\frac{\cos z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = \left[1 - \frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!} + \frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!} - \dots\right]\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{\cos z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n+1)!} \quad ; \left|z+\frac{\pi}{2}\right| < \pi \left(\begin{array}{l}\text{distância até a singularidade}\\ \text{mais próxima}\end{array}\right)$$

Como não há potências negativas de $\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$, f é inteira em $z_1 = -\frac{\pi}{2}$

5-) a)

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = z+1 \cdot \frac{(-1)}{1-z} = -(z+1)\frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} -(z+1)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^{n+1}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-z^n\right) - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-z^n\right) = \boxed{-1-2\sum_{n=1}^{\infty} z^n}$$

b)

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = \frac{z+1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \underset{|z|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1}{=} \left(1+\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$$

$$f(z) = \left(1+\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \boxed{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}}$$

6-) a) $f(z) = \dfrac{1}{4z-z^2}$; $0 < |z| < 4$

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{z(4-z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{4-z} = \frac{A(4-z)+Bz}{z(4-z)} = \frac{4A+(B-A)z}{z(4-z)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ B-A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = A = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad |z| < 4 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{4}\right| < 1$$

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z} + \frac{1}{4(4-z)} = \frac{1}{4z} + \frac{1}{16\left(1-\frac{z}{4}\right)} \overset{\left|\frac{z}{4}\right|<1}{=} \frac{1}{4z} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$$

6-) b) $0<|z-1|<2 \iff |z-1|>0$ e $\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1$

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3}=\frac{(A+B)z-(3A+B)}{(z-1)(z-3)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\3A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2A=-1\\B=1-A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{-1}{2(z-1)}+\frac{3}{2(z-3)}=\frac{-1}{2(z-1)}+\frac{3}{2(z-1-2)}=\frac{-1}{2(z-1)}-\frac{3}{4\left(1-\frac{z-1}{2}\right)}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)}\underset{\left|\frac{z-1}{2}\right|<1}{\Big\downarrow}=\frac{-1}{2(z-1)}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

c) $|z-1|>2 \iff \left|\dfrac{2}{z-1}\right|<1$

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{-1}{2(z-1)}+\frac{3}{2(z-1-2)}=\frac{-1}{2(z-1)}+\frac{3}{2(z-1)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z-1}\right)}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{-1}{2(z-1)}+\frac{3}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n=\frac{1}{z-1}+3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}$$

7-) a) $\operatorname{cosec} z=\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$; $z_0=0$

$$\operatorname{sen} z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots$$

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots}$$

Como a singularidade mais próxima de $z_0=0$ é $z=\pi$, o disco de convergência da série é $0<|z|<\pi$

Fazendo a divisão de séries:

$$\begin{array}{l|l}
1 & z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots \\ \cline{2-2}
-1+\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\frac{z^6}{7!}-\dots & z^{-1}+\frac{z}{3!}+z^3\left(\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right)+\dots \\ \hline
\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\frac{z^6}{7!}-\dots & \\
-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{(3!)^2}-\frac{z^6}{3!5!}+\frac{z^8}{3!7!}-\dots & \\ \hline
z^4\left(\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right)+z^6\left(\frac{1}{7!}-\frac{1}{3!5!}\right)+\dots &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} z=\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}z-\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{(3!)^2}\right)z^3+\dots \qquad (0<|z|<\pi)$$

7-) b) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad ; z_0 = 0$

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}$$

Fazendo a divisão de séries:

$$\begin{array}{l|l} 1 & z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\ \hline -1 - \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} - \frac{z^3}{4!} - \dots & z^{-1} - \frac{1}{2!} + \left(\frac{1}{(2!)^2} - \frac{1}{3!}\right) z - \dots \\ \hline -\frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} - \frac{z^3}{4!} - \dots & \\ \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{(2!)^2} + \frac{z^3}{2!3!} + \frac{z^4}{2!4!} + \dots & \\ \hline z^2\left(\frac{1}{(2!)^2} - \frac{1}{3!}\right) + z^3\left(\frac{1}{2!3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots & \end{array}$$

Como a singularidade mais próxima de $z_0 = 0$ é $z = 2\pi$, o disco de convergência da série é $0 < |z| < 2\pi$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2!} + \left(\frac{1}{(2!)^2} - \frac{1}{3!}\right) z - \dots = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} z - \dots \qquad (0 < |z| < 2\pi)$$

8-) $f(z) = \log(1+z) \quad ; z_0 = 0 \qquad \log 1 = 0$

$f'(z) = \frac{1}{1+z} \;;\; f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2} \;;\; f'''(z) = \frac{+2}{(1+z)^3} \;;\; f^{(4)}(z) = \frac{-2.3}{(1+z)^4}$

$$\log(1+z) = \cancelto{0}{\log 1} + 1.z - 1\frac{z^2}{2!} + 2\frac{z^3}{3!} - 2.3\frac{z^4}{4!} + \dots = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

Como a singularidade mais próxima de $z_0 = 0$ é $z < -1$ e a distância até a singularidade é $\underline{1}$:

$\Rightarrow$ O disco de convergência é $|z| \leq 1$.

9-) $f(z) = \arctan z \quad ; z_0 = 0 \qquad \arctan 0 = 0$

Considere $g(z) = \frac{1}{1+z} \quad ; z_0 = 0$

$g'(z) = \frac{-1}{(1+z)^2} \;;\; g''(z) = \frac{+2}{(1+z)^3} \;;\; g'''(z) = \frac{-2.3}{(1+z)^4}$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - 1z + 2\frac{z^2}{2!} - 2.3\frac{z^3}{3!} + \ldots = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

trocando z por z^2:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$$

Integrando a série termo a termo:

$$\operatorname{arc\,tan} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

Verifica-se que $\operatorname{arc\,tan} 0 = 0$.

Como $f(z) = \operatorname{arc\,tan} z$ é uma função inteira, seu disco de convergência é infinito.