1-)

$$\int_{\alpha}^{\beta} z\,dz$$

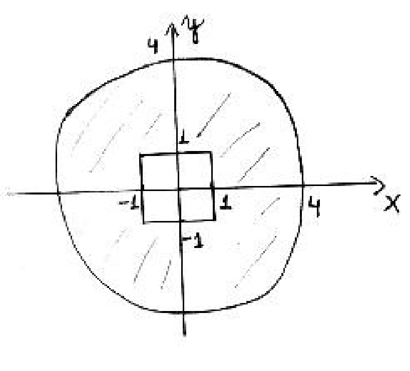
$f(z)=z$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo

$\therefore \int_{\alpha}^{\beta} z\,dz$ independe do caminho

$$\int_{\alpha}^{\beta} z\,dz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{\alpha}^{\beta}$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \alpha^2\right)}$$

2-)



Teorema de Cauchy - Goursat:

Seja $f(z)$ bem definida e analítica em uma região multiplamente conexa R e na borda de R. Se B denota o bordo de R, onde B consiste de um número finito de curvas fechadas disjuntas, em que cada uma é descrita de forma que os pontos de R fiquem à esquerda, então: $\int_B f(z)\,dz = 0$

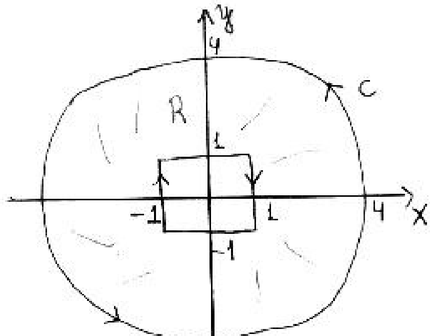
a) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$

pontos singulares:

$3z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow z_1 = \dfrac{i}{\sqrt{3}}$, $z_2 = \dfrac{-i}{\sqrt{3}}$ } são internos ao quadrado

Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, para que $\int_C f(z)\,dz = 0$, C deve ser orientada da seguinte forma:



b) $f(z) = \dfrac{z+2}{\operatorname{sen}\frac{z}{2}}$

pontos singulares:

$\operatorname{sen}\dfrac{z}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{z_n}{2} = n\pi$, $z_n = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ } são externos ao círculo ou internos ao quadrado

Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, para que $\int_C f(z)\,dz = 0$, C deve ser orientada como no item a

c) $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$

pontos singulares:

$1 - e^z = 0$

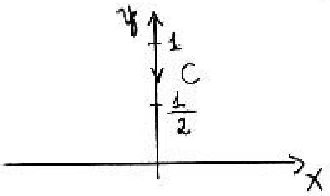
$e^z = 1 \Rightarrow z = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$

$z = 0$ é interno ao quadrado

$z = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$ é externo ao círculo

Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, para que $\int_C f(z)\,dz = 0$, C deve ser orientada como no item a

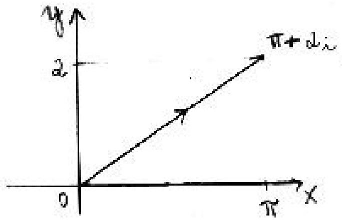
3-) a)



$f(z) = e^{\pi z}$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo

$$\int_i^{i/2} e^{\pi z}\,dz = \left.\frac{e^{\pi z}}{\pi}\right|_i^{i/2} = \frac{1}{\pi}\left[e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\pi}\right] = \frac{1}{\pi}(i+1)$$

3-) b)

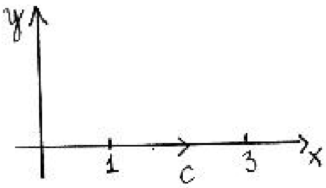


$f(z) = \cos\frac{z}{2}$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo

$$\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\, dz = 2\,\mathrm{sen}\frac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2i} = 2\,\mathrm{sen}(\pi+2i) =$$

$$= 2\left[\mathrm{sen}\,\pi \cos 2i + \mathrm{sen}\,2i \cos\pi\right] = \underline{-2\,\mathrm{sen}\,2i}$$

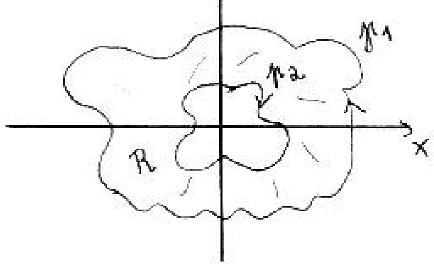
c)



$f(z) = (z-2)^3$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo

$$\int_1^3 (z-2)^3\, dz = \frac{(z-2)^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \underline{0}$$

4-) a)



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$f(z) = \frac{1}{z^2} \Rightarrow z = 0$ é singular

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas orientadas como ao lado (a região R não contém a origem). Pelo Teorema de Cauchy-Goursat:

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2}\, dz = 0$$

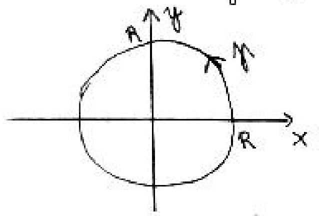
$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2}\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2}\,dz - \int_{-\gamma_2} \frac{1}{z^2}\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2}\,dz = \int_{-\gamma_2} \frac{1}{z^2}\,dz$$ $\Rightarrow$ A integral $\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz$ sobre qualquer curva fechada simples que contenha a origem tem o mesmo valor.

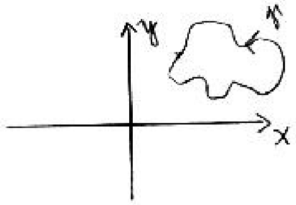
Escolhendo a seguinte curva:



$$\gamma: \begin{cases} z = Re^{i\theta} \\ dz = iRe^{i\theta}\,d\theta \end{cases} \quad ; \quad \theta \text{ de } 0 \text{ a } 2\pi$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 e^{2i\theta}}\, iRe^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i}{R}\, e^{-i\theta}\,d\theta = -\frac{i}{iR}\, e^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi} = \underline{0}$$

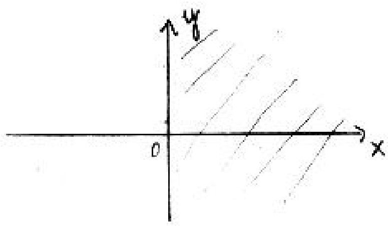
b)



$\frac{1}{z^2}$ é analítica dentro e sobre γ

$\therefore$ Pelo Teorema de Cauchy - Goursat: $\boxed{\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = 0}$

5-) a) $f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow z_0 = 0$ é ponto singular



$Re(z) \geq 0$

No entanto a curva não passa pela origem

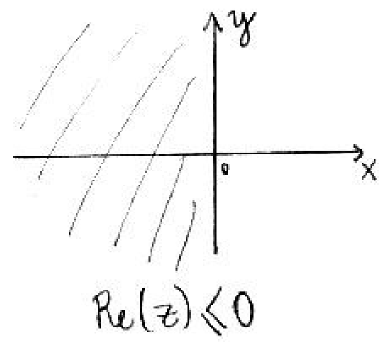
$f(z)$ é analítica na região de integração

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \log z \Big|_{-2i}^{2i} \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \log(2i) - \log(-2i) = \left(\log 2 + i\frac{\pi}{2}\right) - \left(\log 2 - i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}\,dz = i\pi}$$

5-) b) Da mesma forma que no item ⓐ, a curva não passa pela origem:



$f(z)$ é analítica na região de integração

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \log z \Big|_{-2i}^{2i} \quad ; \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

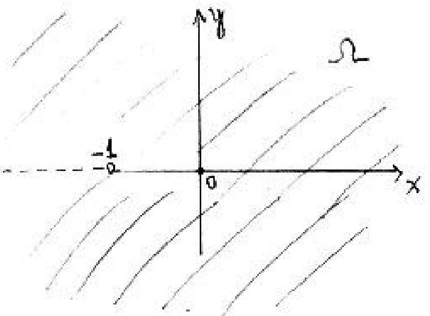
$$\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \log(2i) - \log(-2i) =$$

$$= \left(\log 2 + i\frac{\pi}{2}\right) - \left(\log 2 + i\frac{3\pi}{2}\right) = \underline{-i\pi}$$

6-) $\int_C (z+1)^{1/2}\,dz$

o ramo da raiz quadrada é: $1^{1/2} = -1$

que define a região $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z+1$ não é um número real negativo ou zero$\}$



Ω é o plano $\mathbb{C}$ menos um raio que se origina em -1

Se $z \in \mathbb{C}$, podemos escrever:

$$z + 1 = R\,e^{i\theta}$$

$$z = -1 + R\,e^{i\theta} \quad ; \quad \pi < \theta < 3\pi$$

então:

$$(z+1)^{1/2} = \sqrt{R}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

para $z = 0$ $(R = 1$ e $\theta = 2\pi)$:

$$(1)^{1/2} = \sqrt{1}\,e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \underline{1^{1/2} = -1}$$

mas $f(z) = (z+1)^{1/2} = \sqrt{R}\,e^{i\theta/2}$ é analítica em Ω e Ω é simplesmente conexo

Então:

$\int_C (z+1)^{1/2}\, dz$ independe do caminho

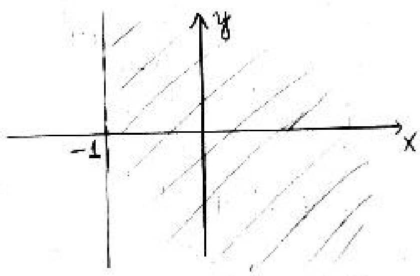
$$\int_C (z+1)^{1/2}\, dz = \int_{-1-4i}^{-1+9i} (z+1)^{1/2}\, dz = \frac{2}{3}(z+1)^{3/2}\Big|_{-1-4i}^{-1+9i} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[(9i)^{3/2} - (-4i)^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left(9^{3/2} e^{i\frac{15\pi}{4}} - 4^{3/2} e^{i\frac{9\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{27}{\sqrt{2}}(1-i) - \frac{8}{\sqrt{2}}(1+i)\right] = \underline{\frac{\sqrt{2}}{3}(19-35i)}$$

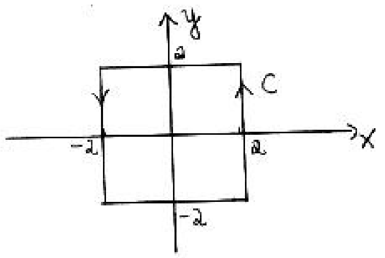
$$9i = 9e^{i\frac{5\pi}{2}}$$

$$-4i = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$$



C está contido em Ω

7-)



Fórmula Integral de Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

a) pontos singulares:

$z_0 - i\frac{\pi}{2} = 0$

$z_0 = i\frac{\pi}{2}$ é interno a C

Pela Fórmula Integral de Cauchy:

$f(z) = e^{-z}$

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\, dz = \frac{2\pi i}{0!}\, e^{-z_0} = 2\pi i(-i)$$

$$\underline{\int_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\, dz = 2\pi}$$

7-) b) pontos singulares:

$z_0 = 0$ é interno a C

$z^2+8=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z_1 = 2\sqrt{2}\,i \\ z_2 = -2\sqrt{2}\,i \end{array}\right\}$ são externos a C

$f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2+8}$ é analítica dentro e sobre C

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz = \frac{2\pi i}{0!} f(0) = 2\pi i \frac{\cos 0}{0+8} = i\frac{\pi}{4}$$

c) pontos singulares:

$2z_0+1=0$

$z_0 = -\dfrac{1}{2}$ é interno a C

$f(z) = z$

$$\int_C \frac{z}{2z+1}\,dz = \frac{1}{2}\int_C \frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi i}{0!}\,f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -i\frac{\pi}{2}$$

d) pontos singulares:

$z_0 = x_0$; $|x_0|<2$

é interno a C

$f(z) = \tan\left(\dfrac{z}{2}\right) \Rightarrow f'(z) = \dfrac{1}{2}\sec^2\left(\dfrac{z}{2}\right)$

$$\int_C \frac{\tan\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-x_0)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(x_0) = \frac{2\pi i}{2}\sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right) = i\pi\sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

e) pontos singulares:

$z_0 = 0$ é interno a C

$f(z) = \cosh z$ $\quad f'(z) = \operatorname{senh} z$ $\quad f''(z) = \cosh z$ $\quad f^{(3)}(z) = \operatorname{senh} z$

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{2\pi i}{3!}\operatorname{senh} 0 = 0$$

8-) Se z_0 é um ponto externo a C, pelo Teorema de Cauchy-Goursat:

$\dfrac{f'(z)}{z-z_0}$ é analítica dentro e sobre C $\Rightarrow \displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = 0$

$\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}$ é analítica dentro e sobre C $\Rightarrow \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 0$

$$\therefore \int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz \quad ; z_0 \text{ externo a C}$$

Se z_0 é um ponto interno a C, pela Fórmula Integral de Cauchy:

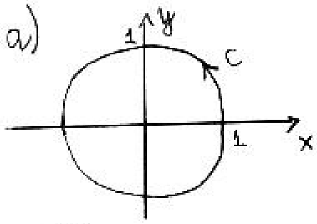
$$\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\, dz = \frac{2\pi i}{0!} f'(z_0) = 2\pi i\, f'(z_0) \qquad (\text{I})$$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z_0) = 2\pi i\, f'(z_0) \qquad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II):

$$\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

9-) a)



pontos singulares:
$z_0 = 0$ é interno a C

Pela Fórmula Integral de Cauchy:

$$\int_C \frac{e^{rz}}{z}\, dz = \frac{2\pi i}{0!} e^{r.0} = \underline{2\pi i}$$

b) do item (a):

$$\begin{cases} z = e^{it} \\ dz = i e^{it}\, dt \end{cases} \quad ; -\pi < t < \pi$$

$$\int_C \frac{e^{rz}}{z}\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{re^{it}}}{e^{it}}\, i e^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{r(\cos t + i \operatorname{sen} t)}\, dt =$$

$$= i \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{r\cos t} \cos(r \operatorname{sen} t)\, dt + i \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{r\cos t} \operatorname{sen}(r \operatorname{sen} t)\, dt}_{=0} \right] =$$

$$= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{r\cos t} \cos(r \operatorname{sen} t)\, dt = 2\pi i \qquad (\text{I})$$

Onde a segunda integral é zero, pois $e^{r\cos t} \operatorname{sen}(r \operatorname{sen} t)$ é uma função ímpar, integrada em um intervalo simétrico.

De (I):

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha \cos t} \cos(\alpha \operatorname{sen} t)\, dt = 2\pi$$

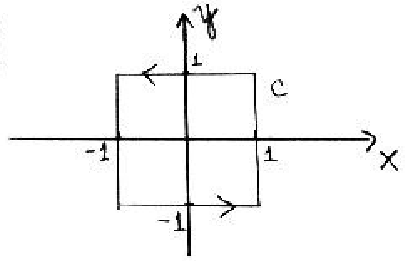
mas $e^{\alpha \cos t} \cos(\alpha \operatorname{sen} t)$ é uma função par:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha \cos t} \cos(\alpha \operatorname{sen} t)\, dt = 2\int_{0}^{\pi} e^{\alpha \cos t} \cos(\alpha \operatorname{sen} t)\, dt = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\pi} e^{\alpha \cos t} \cos(\alpha \operatorname{sen} t)\, dt = \pi$$

$$\int_{0}^{\pi} e^{\alpha \cos\theta} \cos(\alpha \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \pi$$

10-)



pontos singulares:

$$4z^2 + 4z - 3 = 0$$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} \text{ é interno a C} \\ z_2 = \frac{-3}{2} \text{ é externo a C} \end{cases}$$

o ramo da raiz quadrada é: $4^{1/2} = -2$

devemos escolher Ω de modo que $(z^2+4)^{1/2} = (z-2i)^{1/2}(z+2i)^{1/2}$ seja negativa em todo eixo real positivo e isso ocorre se:

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z-2i) < \frac{5\pi}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z+2i) < \frac{3\pi}{2}$$

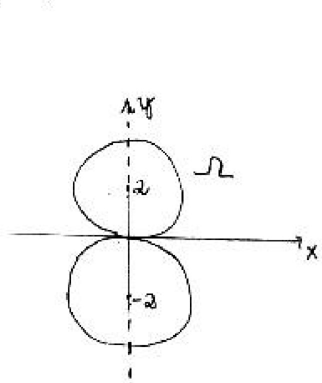
$$z = 2i + Re^{i\theta} = -2i + Se^{i\varphi} \quad ; \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} z - 2i = Re^{i\theta} \\ z + 2i = Se^{i\varphi} \end{cases}$$

$$(z^2+4)^{1/2} = (z-2i)^{1/2}(z+2i)^{1/2} = R^{1/2} e^{i\theta/2}\, S^{1/2} e^{i\varphi/2} = (RS)^{1/2} e^{i(\theta+\varphi)/2}$$

para $z = 0$ $\left(R = 2 \text{ e } \theta = \frac{3\pi}{2} \ ; \ S = 2 \text{ e } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$(4)^{1/2} = (2.2)^{1/2} e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)/2} = 2e^{i\pi} = -2$$



$f(z) = \dfrac{(z^2+4)^{1/2}}{(z+3/2)}$ é analítica em Ω e Ω é simplesmente conexo

C está contido em Ω

Podemos aplicar a fórmula Integral de Cauchy:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{17}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{\sqrt{17}}{4} \quad ; \quad (4)^{\frac{1}{2}} = -2$$

$$\int_C \frac{(z^2+4)^{\frac{1}{2}}}{4z^2+4z-3}\,dz = \frac{1}{4}\int_C \frac{(z^2+4)^{\frac{1}{2}}}{\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,dz = \frac{1}{4}\,\frac{2\pi i}{0!}\,f\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{17}}{4}\,\frac{\pi}{2}\,i = \boxed{-\frac{\sqrt{17}\,\pi}{8}\,i}$$