9.a aula: 22set (resumo)

9.1 Lema de Goursat, versão refinada *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua em Ω e holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Então*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

para todo triângulo $\Delta \subset \Omega$ que tem um vértice em z_0.

Dem. Sobre os lados de Δ em que z_0 é um vértice, selecionamos dois pontos e construímos três sub-triângulos Δ_1, Δ_2, Δ_3. As integrais sobre os caminhos interiores se cancelam e, como $\Delta_2 \cup \Delta_3 \subset \Omega \setminus \{z_0\}$, onde f é holomorfa, o lema original de Goursat diz que as integrais sobre Δ_2 e Δ_3 se anulam. Segue que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz$$

e assim

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \right| \leq M \cdot L(\partial\Delta_1),$$

onde M é o máximo de f sobre Δ. Como $L(\partial\Delta_1)$ pode ser feito arbitrariamente pequeno, segue que $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$. q.e.d.

9.2 Teorema integral de Cauchy para domínios estrelados, versão refinada. *Seja Ω um domínio estrelado com centro em z_0. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua em Ω e holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Então f admite primitivas em Ω.*

Dem. Como na prova de (8.4), o resultado segue de (8.2) mas agora usando (9.1). q.e.d.

9.3 Fórmula integral de Cauchy para discos. *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $B = B(z_0, r)$ é uma bola aberta que juntamente com sua fronteira está contida em Ω, então para todo $z \in B$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Dem. Consideremos

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{se } \xi \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{se } \xi = z. \end{cases}$$

Então g é holomorfa em $\Omega \setminus \{z\}$ e contínua em Ω. Existe uma bola B' de centro em z_0 e raio um pouco maior do que r que está contida em Ω. Sendo

B' convexa, a versão refinada do Teorema Integral de Cauchy (9.2) diz que g admite primitivas em B' de modo que $\int_{\partial B} g(\xi)\,d\xi = 0$. Mas

$$\int_{\partial B} g(\xi)\,d\xi = \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - f(z)\int_{\partial B} \frac{1}{\xi - z}\,d\xi = \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - 2\pi i f(z),$$

como desejado. q.e.d.

9.4 (*Exemplos*) (i) $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$ já que $f(z) = e^z$ é inteira.

(ii) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{z-i} - \int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{z+i}\right) = \frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i) = 0$ já que $f(z) = 1$ é inteira e $\pm i$ pertencem a $B(0,2)$.

9.5 (*Exemplo*). Seja R o retângulo de vértices $-a$, a, $a + i\sqrt{b}$, $-a + i\sqrt{b}$, onde $a > 0$, $0 < b < 1$. O teorema integral de Cauchy dá $\int_{\partial R} \frac{dz}{z^2+1} = 0$. Parametrizando R, obtemos $\sum_{j=1}^4 I_j = 0$, onde

$$I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{dt}{t^2+1},\ I_2 = \int_0^{\sqrt{b}} \frac{i\,dt}{(a+it)^2+1},$$

$$I_3 = -\int_{-a}^{a} \frac{dt}{(t+i\sqrt{b})^2+1},\ I_4 = -\int_0^{\sqrt{b}} \frac{i\,dt}{(-a+it)^2+1}.$$

Note que

$$|I_2| \le \int_0^{\sqrt{b}} \left|\frac{i}{(a+it)^2+1}\right| dt \le \frac{\sqrt{b}}{a^2} \to 0$$

quando $a \to +\infty$, e similarmente $I_4 \to 0$. Além disso,

$$-I_3 = \int_{-a}^{a} \frac{1 - b + t^2 - 2i\sqrt{b}t}{(1-b+t^2)^2 + 4bt^2}\,dt$$

onde a integral da parte ima ginária é zero pela função ser ímpar. Segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-b+t^2}{(1-b+t^2)^2+4bt^2}\,dt &= \lim_{a\to+\infty} -I_3 \\ &= \lim_{a\to+\infty} I_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Ex. 9.1 Usar a fórmula integral de Cauchy para calcular: (a) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{e^z\,dz}{(z+1)(z-3)^2}$; (b) $\int_{\partial B(-2i,2)} \frac{dz}{z^2+1}$; (c) $\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin z}{z+i}\,dz$; (d) $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^z}{(z-2)^3}\,dz$.

Ex. 9.2 Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 + a^4}\,dt,$$

onde $a > 0$, integrando $(a^2 + z^2)^{-1}$ ao longo do triângulo de vértices 0, R, $Re^{\frac{\pi i}{4}}$ e tomando o limite quando $R \to \infty$.