6.a aula: 23ago (resumo)

6.1 Se $f(t) = u(t) + iv(t)$ é uma função contínua definida no intervalo (a, b), definimos

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Valem as propriedades usuais em relação à adição de funções e à multiplicação por uma constante (complexa). Além disso, se $a \leq b$, então

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{1}$$

De fato, escrevendo $\int_a^b f(t)\,dt = re^{i\theta}$ temos:

$$\begin{aligned} r &= \Re\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt\right] \\ &= \int_a^b \Re[e^{-i\theta}f(t)]\,dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta}f(t)|\,dt \\ &= \int_a^b |f(t)|\,dt, \end{aligned}$$

como desejado.

6.2 Mais geralmente, se C é uma curva de classe $\mathcal{C}^1$ (por partes), parametrizada por meio de

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \leq t \leq b,$$

e f é uma função contínua a valores complexos definida sobre $z([a, b])$, definimos a *integral de linha complexa*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$$

Valem as propriedades usuais em relação à adição de funções e à multiplicação por uma constante (complexa).

6.3 (*Exemplos*) (a) A integral $\int_C \frac{dz}{z}$ vale πi se $C: \; z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, é o trecho superior do círculo unitário de 1 até i, mas $-\pi i$ se $C: \; z(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq \pi$, é o trecho inferior.

(b) $\int z\,dz = \int_a^b z(t)z'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left[z(t)^2\right]\,dt = \frac{z(b)^2 - z(a)^2}{2}$ para qualquer C. Em particular, a integral depende apenas dos extremos inicial e final de C (mas não do caminho).

(c) Seja $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log z}$ (um ramo de $z^{1/2}$) para $|z| > 0$, $0 < \arg(z) < 2\pi$, e tomemos $C : z(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Note que f não está definida em 3. Mesmo assim, $f(z(t)) = \sqrt{3}e^{it/2}$ e $\int_C f(z)\,dz = 3i\sqrt{3}\int_0^\pi e^{3it/2}\,dt = -2\sqrt{3}(1+i)$.

6.4 A propriedade mais importante da integral de linha complexa é sua invariância por mudança de parâmetro. Seja $t = \varphi(s)$ onde $c \le s \le d$, onde φ é de classe $\mathcal{C}^1$. Então pela fórmula de mudança de variável de integração,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt &= \int_c^d f(z(\varphi(s)))z'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \\ &= \int_c^d f(\tilde{z}(s)))\tilde{z}'(s)\,ds\end{aligned}$$

onde $\tilde{z}(s) = z(\varphi(s))$ é outra parametrização de C.

6.5 O caminho *oposto* de C é denotado $-C$ e tem parametrização $\tilde{z}(t) = z(-t)$, $-b \le t \le a$. Temos

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(z)\,dz &= \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t))\,dt \\ &= \int_b^a f(z(t))z'(t)\,dt \\ &= -\int_C f(z)\,dz,\end{aligned}$$

onde usamos a fórmula de mudança de variável novamente (para a segunda igualdade).

6.6 Finalmente, a integral de linha complexa também é aditiva em relação à concatenação de curvas, denotada por $C_1 + \cdots + C_n$:

$$\int_{C_1+\cdots+C_n} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

Ex. 6.1 Calcular $\int_C x\,dz$ onde C é o segmento de reta de 0 a $1+i$.

Ex. 6.2 Calcular $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ onde C é o círculo $|z| = 2$ orientado no sentido anti-horário.

Ex. 6.3 Sendo f holomorfa num domínio contendo uma curva fechada simples$C$, mostrar que $\int_C \overline{f(z)}f'(z)\,dz$ é puramente imaginário. (Usar o Fato 3.8, se necessário.)