3.a aula: 9ago (resumo)

3.1 Chamaremos de *domínio* do plano $\mathbb{C}$ um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$. Salvo menção em contrário, doravante nossas funções estarão definidas num domínio Ω de $\mathbb{C}$.

3.2 Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita *holomorfa* em um ponto $z_0 \in \Omega$ se f é derivável em todos os pontos de uma bola $B(z_0, \epsilon)$ inteiramente contida em Ω (para algum $\epsilon > 0$). f é dita *holomorfa* em Ω se f é holomorfa em todos os pontos de Ω; equivalentemente, f é holomorfa em Ω se f é derivável em todos os pontos de Ω. Uma função que é holomorfa em todo $\mathbb{C}$ é chamada de *inteira*.

3.3 (*Exemplos de funções holomorfas*) (i) $f(z) = 1/z$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) $f(z) = |z|^2$ não é holomorfa em nenhum ponto (mas é derivável em 0).

(iii) Se f e g são holomorfas em Ω, então $f + g$ e $f \cdot g$ também o são. Além disso, f/g é holomorfa nos pontos $z_0 \in \Omega$ tais que $g(z_0) \neq 0$.

(iv) Se f é holomorfa em Ω e g é holomorfa num domínio contendo $f(\Omega)$, então $g \circ f$ é holomorfa em Ω.

(v) Polinômios $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ são funções inteiras. O quociente de dois polinômios $R(z) = P(z)/Q(z)$ é chamado de uma *função racional*. Uma tal função é holomorfa nos pontos em que $Q(z) \neq 0$. Por exemplo, $R(z) = \frac{z^2+3}{(z+1)(z^2+5)}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\sqrt{5}\}$.

(vi) A função $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ é chamada de *função exponencial* e denotamos $f(z) = e^z = \exp z$. Temos que $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$ são funções de classe $\mathcal{C}^1$ que satisfazem as equações de C-R em $\mathbb{C}$ e portanto a função exponencial é uma função inteira. Note que $f'(z) = u_x + iv_x = f(z)$ para todo z.

(vii) As equações de C-R em coordenadas polares são

$$u_\theta = -r v_r$$
$$v_\theta = r u_r.$$

Como aplicação, seja $f(z) = \sqrt{r}(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$ onde $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixado. Então u e v são de classe $\mathcal{C}^1$ e satisfazem as eqs. de C-R como funções de r, θ. Segue que f é holomorfa em $\mathbb{C}$ menos a semireta $\theta = \theta_0$ e a origem.

3.4 Proposição. Se $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ então f é constante em Ω.

Dem. De fato $0 = f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ implica que u e v têm gradiente nulo e portanto todas as derivadas direcionais nulas em Ω. Segue que u e v são constantes ao longo de qualquer caminho poligonal. Como Ω é conexo, u, v são constantes em Ω de onde segue o resultado desejado. q.e.d.

3.5 Proposição. Se f e $\bar{f}$ são holomorfas em Ω então f é constante.

Dem. $f = u + iv$ e $\bar{f} = u - iv$. Das eqs. de C-R deduzimos que $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Logo $f' = 0$ em Ω e o resultado segue de (3.4). q.e.d.

3.6 Proposição. Se f é holomorfa em Ω e $|f|$ é constante então f é constante.

Dem. Suponhamos $|f(z)| = c \in \mathbb{R}$ para todo z. Se $c = 0$ então $f(z) = 0$ para todo z. Caso contrário, f nunca se anula e $f\bar{f} = |f|^2 = c^2 \neq 0$, portanto $\bar{f} = c^2/|f|^2$ é holomorfa. O resultado segue de (3.5). q.e.d.

3.7 Dizemos que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *harmônica* se u admite derivadas parciais até segunda ordem e $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$. Δ é chamado de *operador Laplaciano*.

3.8 Fato. Se $f = u + iv$ é holomorfa em Ω então u e v são funções de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3.9 Suponhamos que $f = u + iv$ é holomorfa em Ω. Então, usando (3.8) e as eqs. de C-R:

$$\Delta u = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

pela igualdade das derivadas mistas (Teorema de Schwarz). Analogamente $\Delta v = 0$. Mostramos que as partes real e imaginária de uma função holomorfa são funções harmônicas; elas são ditas *harmônicas conjugadas*.

3.10 (i) $f(z) = 1/z^2 = \bar{z}^2/|z|^4$ é holomorfa em $z \neq 0$. Segue que

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^4} \quad \text{e} \quad v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^4}$$

são funções harmônicas em $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) É imediato que $u(x,y) = x^2 - y^2$ é harmônica em $\mathbb{R}^2$. Calculamos sua harmônica conjugada v integrando as eqs. de C-R:

$$v_x = -u_y = 2y$$
$$v_y = u_x = 2x$$

Integrando a primeira equação em relação a x temos $v(x,y) = 2xy + h(y)$. Derivando esta equação em relação a y e comparando com a segunda acima, obtemos $h'(y) = 0$. Portanto $h(y) = c$ (constante real) e $v(x,y) = 2xy + c$.

Ex. 3.1 Determinar os pontos em que f é derivável e os pontos em que é holomorfa em cada caso: (a) $f(z) = 2x + ixy^2$; (b) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$; (c) $f(z) = (3x + y) + i(3y - x)$; (d) $f(z) = xy + iy$; (e) $f(z) = x^2 + iy^2$; (f) $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$.

Ex. 3.2 Prove que $f(z) = \ln r + i\theta$ é holomorfa em $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ e que $f'(z) = 1/z$.

Ex. 3.3 Prove que se f é holomorfa e assume apenas valores reais em um domínio Ω então f é constante.

Ex. 3.4 Determinar a forma mais geral de um polinômio harmônico cúbico $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Exibir seu harmônico conjugado.