**2.a aula: 4ago (resumo)**

**2.1** (*Regiões do plano*) A *bola aberta* de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B(z_0, r)$ formado pelos elementos $z$ de $\mathbb{C}$ que satisfazem $|z - z_0| < r$. Seja $\Omega$ um subconjunto de $\mathbb{C}$. $z_0 \in \mathbb{C}$ é chamado de *ponto interior* de $\Omega$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \subset \Omega$, e é chamado de *ponto exterior* de $\Omega$ se ele é um ponto interior do seu complementar, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \cap \Omega = \varnothing$. A *fronteira* de $\Omega$ é formada por $z \in \mathbb{C}$ que não são nem pontos interiores nem pontos exteriores de $\Omega$. $\Omega$ é dito *aberto* se todos seus pontos são interiores. $\Omega$ é dito *conexo* se dois pontos quaisquer de $\Omega$ podem ser unidos por um caminho poligonal inteiramente contido em $\Omega$. $\Omega$ é dito *limitado* se está contido em alguma bola aberta.

**2.2** (*Diferenciabilidade*) Seja $\Omega$ um conjunto aberto de $\mathbb{C}$, e seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função. Então

$$f = u + iv$$

onde $u$, $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$u(x, y) = \Re f(z), \quad v(x, y) = \Im f(z)$$

e $z = x + iy$. Os conceitos de limite e continuidade não sofrem modificações pensando em $f$ como uma função de duas variáveis reais a valores em $\mathbb{R}^2$. Em particular, $f$ é contínua se e somente se $u$, $v$ são contínuas. Por outro lado, dizemos que $f$ é *diferenciável* (ou *derivável*) em $z_0$ (um ponto interior de $\Omega$) se existe o limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1}$$

em cujo caso, o resultado é denotado por $f'(z_0)$. Note que (1) guarda semelhança com o caso de funções de uma variável real, mas em princípio parece diferente do caso de funções de duas variáveis reais. Verificam-se as regras usuais de derivação de somas, produtos e quocientes.

**2.3** $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$, é diferenciável em todos os pontos, pois

$$\frac{\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \frac{-1}{z(z + \Delta z)} \to \frac{-1}{z^2} \quad \text{quando } \Delta z \to 0.$$

Por outro lado, $f(z) = \bar{z}$ não é diferenciável em nenhum ponto, pois

$$\frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

tem limite 1 se $\Delta z$ se aproxima de 0 por valores reais, mas $-1$ se a aproximação é feita por números puramente imaginários. Note que neste caso $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$ admitem derivadas parciais de todas as ordens (e portanto $f$ seria diferenciável vista como função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

**2.4** Se $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável em $z \in \Omega$ então podemos calcular o limite (1) tomando em particular $\Delta z = \Delta x$ ou $\Delta z = i\Delta y$. Concluímos que:

$$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y) = v_y - iu_y,$$

e chegamos às *equações de Cauchy-Riemann*:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Estas são portanto condições necessárias para diferenciabilidade num ponto e explicam por exemplo o resultado sobre $f(z) = \bar{z}$.

**2.5 Teorema.** Se $u$, $v$ são diferenciáveis em $(x_0, y_0)$ (como funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, então $f = u + iv$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$ (como função $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

*Dem.* Pela hipótese,

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + E_1 \quad \text{e} \quad \Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + E_2$$

onde

$$\frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0, \quad \text{e} \quad \frac{E_2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0, \quad \text{quando } \Delta x,\, \Delta y \to 0.$$

Usando C-R, temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\ &= (u_x + iv_x)\Delta z + E_1 + iE_2, \end{aligned}$$

assim

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = (u_x + iv_x) + \frac{E_1 + iE_2}{\Delta z}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{\Delta z} &= \frac{E_1}{|\Delta z|^2}\overline{\Delta z} \\ &= \frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} - i \frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

e analogamente $\frac{E_2}{\Delta z} \to 0$. q.e.d.

**2.6** Se $u$, $v$ tem derivadas parciais contínuas em $\Omega$ (i.e. $u$, $v$ são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\Omega$) então $u$, $v$ são diferenciáveis em $\Omega$. Deduzimos a seguinte condição suficiente para que $f = u + iv$ seja derivável em $\Omega$: *se $u$, $v$ tem derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $\Omega$, então $f$ é derivável em $\Omega$.*

**Ex. 2.1** Verificar as equações de Cauchy-Riemann para $f(z) = z^2$ e $f(z) = z^3$.

**Ex. 2.2** Provar usando a definição que $f(z) = |z|^2$ é derivável em 0 e não derivável em $z \neq 0$.

**Ex. 2.3** Usar 2.6 para deduzir que $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ é derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$.

**Ex. 2.4** Provar que se $f$ é derivável em $z_0$, então $g$ dada por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ é derivável em $\bar{z}_0$.