16.a aula: 1nov (resumo)

16.1 Zeros de funções holomorfas. Suponhamos que f é holomorfa numa bola B centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f(z_0) = 0$. Então f é analítica em z_0 e alguma derivada $f^(m)(z_0) \neq 0$, a não ser que f seja identicamente nula em B. Dizemos que f é um zero de ordem (ou multiplicidade) m se $f^(n)(z_0) \neq 0$ para $n = 0, \ldots, m-1$ e $f^(m)(z_0) \neq 0$. Neste caso a série de Taylor f em z_0 se escreve $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ onde $a_m \neq 0$. Podemos então escrever $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ onde a função g dada por

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-m} & \text{se } z \in B \setminus \{z_0\} \\ a_m & \text{se } z = z_0, \end{cases}$$

é holomorfa em B. Por continuidade, g não se anula numa vizinhança de z_0 e portanto z_0 é uma zero isolado de f. Mostramos que *os zeros de uma função holomorfa não nula definida numa bola são isolados.*

16.2 Princípio da Identidade. *Sejam f, g funções holomorfas numa bola aberta B centrada em z_0. Suponhamos que $f(z) = g(z)$ para todo z pertencente a um subconjunto A de B que se acumula em z_0. Então $f = g$ em B.*

Dem. Dizer que z_0 é um ponto de acumulação de A significa dizer que existe uma seqüência $z_n \in A$ tal que $z_n \to z_0$. Então $f - g$ é uma função holomorfa que se anula em z_n e portanto em z_0 por continuidade. Como z_0 não é um zero isolado de $f - g$, temos que $f - g$ é identicamente nula em B. q.e.d.

16.3 Critério para um pólo. *Se f tem uma singularidade isolada em z_0 e $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ então z_0 é um pólo de f.*

Dem. Seja $g = 1/f$. Temos $\lim_{z \to z_0} |g(z)| = 0$, e pelo Ex. 15.4, g tem uma singularidade removível em z_0 com $g(z_0) = 0$. Então $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$ para $m \in \mathbb{Z}_+$, com h holomorfa em z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Segue que $(z - z_0)^m f(z) = 1/h(z)$ é holomorfa em z_0, isto é, f tem um pólo de ordem m em z_0. q.e.d.

16.4 Resíduos. Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$. O *resíduo* de f em z_0 é o número complexo

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

onde C é qualquer curva fechada simples contida no disco perfurado e que contém z_0 no seu interior. Notemos que

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$$

onde a_{-1} é o coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ na expansão de Laurent de f centrada em z_0.

16.5 Exemplos (i) $\int_C \frac{e^z-1}{z^4}\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}_0\left(\frac{e^z-1}{z^4}\right) = 2\pi i \mathrm{Res}_0\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-4}}{n!}\right) = 2\pi i\frac{1}{3!} = \frac{\pi i}{3}$.

(ii) $\int_C \cosh\left(\frac{1}{z^2}\right)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}_0 \cosh\left(\frac{1}{z^2}\right) = 2\pi i \mathrm{Res}_0\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-2n}}{(2n)!}\right) = 0$.

(iii) Como $\frac{1}{z(z-2)^5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-5}$ para $0 < |z-2| < 2$, temos $\int_{|z-2|=1}\frac{dz}{z(z-2)^5} = 2\pi i \mathrm{Res}_2\left(\frac{1}{z(z-2)^5}\right) = 2\pi i\frac{1}{32} = \frac{\pi}{16}$.

16.6 Teorema dos Resíduos de Cauchy. *Seja f uma função holomorfa sobre uma curva fechada simples C e sobre seu interior, exceto um número de pontos singulares $z_1, \ldots, z_n$ no interior de C. Então*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{z_k}(f).$$

Dem. Sejam C_k pequenos círculos centrados em z_k, contidos no interior de C, disjuntos dois a dois. Pelo teorema integral de Cauchy para domínios simplesmente conexos (14.3),

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{z_k}(f),$$

q.e.d.

16.7 Exemplo. $\int_{|z|=2}\frac{4z-5}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_0 + \mathrm{Res}_1\right) = 2\pi i(5 + (-1)) = 8\pi i.$

Ex. 16.1 Prove que não existe função holomorfa no disco unitário tal que $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$.

Ex. 16.2 Calcular o resíduo em 0 da função indicada: (a) $\frac{1}{z+z^2}$; (b) $z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$; (c) $\frac{z-\sin z}{z}$; (d) $\frac{\cot z}{z^4}$ (e) $\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$.

Ex. 16.3 Usar o teorema dos resíduos de Cauchy para calcular $\int_{|z|=3} f(z)\,dz$, onde f é a função indicada: (a) $\frac{e^{-z}}{z^2}$; (b) $\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$; (c) $z^2e^{1/z}$; (d) $\frac{z+1}{z^2-2z}$.

Ex. 16.4 Sejam f e g funções holomorfas em z_0 e assumamos que g tem um zero simples (ordem um) em z_0 e que f não se anula em z_0. Prove que f/g tem um pólo simples em z_0 e

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$