15.a aula: 27out (resumo)

15.1 Exemplos (i) Vimos que $\frac{1}{1-z}$ é representado no disco $|z| < 1$ por $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Trocando z por $1/z$, vemos que $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ em $|z| > 1$.

(ii) Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\end{aligned}$$

no anel $1 < |z| < 2$.

15.2 Uma série da forma

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n} + \cdots \tag{1}$$

pode ser considerada uma série de potências usual na variável $1/z$. Ela portanto converge no exterior de um círculo. Combinando (1) com uma série de potências usual, obtemos uma série do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

chamada de *série de Laurent*. Ela é dita convergente quando as partes consistindo de potências positivas e potências negativas são separadamente convergentes. Desta forma, a região de convergência de uma tal série é uma anel da forma $R_1 < |z| < R_2$ onde $R_1 = \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n}$ e $R_2 = 1/\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

15.3 Reciprocamente, se f é holomorfa no anel $\Omega : R_1 < |z - z_0| < R_2$ vamos mostrar que ela é representada por uma série de Laurent no anel. De fato, pela fórmula integral de Cauchy para um anel (14.5), temos

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

onde

$$f_1(z) = -\int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad \text{e} \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

para $z \in \Omega$ e $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$. Da demonstração de (11.1) sabemos que f_2 é analítica no disco $|z - z_0| < r_2$ e admite expansão em série de Taylor

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Para estudar f_1, façamos a mudança de variáveis $\xi = z_0 + 1/\xi'$, $z = z_0 + 1/z'$, que leva o círculo $|z - z_0| = r_1$ em $|z'| = 1/r_1$ com a orientação oposta (sentido horário), de forma que

$$f_1\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right) = \frac{z'}{2\pi i} \int_{|\xi'| = \frac{1}{r_1}} \frac{f\left(z_0 + \frac{1}{\xi'}\right)}{\xi'(\xi' - z')} \, d\xi'.$$

Esta função é analítica em $|z'| < 1/r_1$, anula-se em $z' = 0$, e admite expansão em série de Taylor que escrevemos

$$f_1(z) = f_1\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Agora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2}$$

para $R_1 < |z - z_0| < R_2$, onde fizemos $a_{-n} = b_n$ para $n \geq 1$.

Determinamos os a_n multiplicando ambos os membros de (2) por $(z - z_0)^{-k-1}$ e integrando termo a termo:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz.$$

(compare com Ex. 15.2).

15.4 Singularidades isoladas. Se f é holomorfa num disco pefurado $0 < |z - z_0| < R$, dizemos que z_0 é uma *singularidade isolada* de f. Estas se classificam em três tipos, de acordo coma expansão de Laurent (2):

(i) *removível* se $a_n = 0$ para todo n negativo. Neste caso, f pode ser extendida a uma função holomorfa no disco pondo $f(z_0) = a_0$. Por ex., $\frac{\sin z}{z}$ e $z_0 = 0$.

(ii) *polares* se $a_{-m} \neq 0$ mas $a_n = 0$ para $n < -m$ onde m é um inteiro positivo. Neste caso dizemos que z_0 é um pólo de ordem m de f. Note que então $(z - z_0)^m f(z)$ tem uma singularidade removível em z_0 e que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Por ex., $1/z^m$ e $z_0 = 0$.

(iii) *essencial* se $a_n \neq 0$ para infinitos índices n negativo. Por ex., $e^{1/z}$ e $z_0 = 0$.

Ex. 15.1 Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $0 < |\alpha| < |\beta|$. Determinar uma série em potências positivas e negativas de z que representa $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ nas seguintes regiões: (i) $|\alpha| < |z| < |\beta|$; (ii) $|z| < |\alpha|$; (iii) $|\beta| < |z|$.

Ex. 15.2 Mostrar que

$$\int_{\partial B(z_0, r)} \frac{1}{(z - z_0)^k} \, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } k = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ex. 15.3 Localizar e classificar as singularidades isoladas das funções dadas: (a) $\frac{z+1}{z^2-2z}$; (b) $\frac{z^4}{(z^4+16)^2}$; (c) $\frac{1}{\sin^2 z}$; (d) $\sin \frac{1}{z}$.

Ex. 15.4 Seja z_0 uma singularidade isolada de f. Mostre que se f é limitada numa vizinhança de z_0, então z_0 é uma singulariade removível.