14.a aula: 25out (resumo)

14.1 Um domínio Ω de $\mathbb{C}$ é chamado de *simplesmente conexo* se toda curva fechada simples de classe $\mathcal{C}^1$ por partes C em Ω é tal que seu interior está inteiramente contido em Ω. Por exemplo, $\mathbb{C}$, bolas abertas e $\mathbb{C}^-$ são exemplos de domínios simplesmente conexos, enquanto que $\mathbb{C}^\times$ é um exemplo de domínio que não é simplesmente conexo.

14.2 Teorema integral de Cauchy em domínios simplesmente conexos. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f*

$$\int_C f(\xi)\, d\xi = 0$$

para toda curva fechada C em Ω.

Dem. Se $C = \partial\Delta$ é o bordo um triângulo Δ, temos $\Delta \subset \Omega$ pela hipótese sobre Ω, e o resultado segue do Lema integral de Goursat 8.3.

Seja agora C o bordo de um retângulo R. A hipótese sobre Ω implica $R \subset \Omega$. Cortando R ao longo de uma diagonal em dois triângulos Δ_1 e Δ_2, temos $\int_{\partial R} = \int_{\partial\Delta_1} + \int_{\partial\Delta_2} = 0$ pelo parágrafo anterior.

Podemos agora construir uma primitiva de f em Ω, analogamente ao que foi feito na demonstração de (7.3). Seja $z_0 \in \Omega$. Dado $z \in \mathbb{C}$, observamos que podemos unir z_0 a z por uma curva poligonal $P_{z_0,z}$ consistindo de um número finito de segmentos, cada um dos quais paralelo a um dos eixos real ou imaginário. Se $\tilde{P}_{z_0,z}$ é outra escolha de curva nessas condições, a diferença entre elas pode ser escrita como uma união finita$= \cup_i \partial R_i$ de bordos de retângulos R_i (com lados paralelos aos eixos) e $\int_{\tilde{P}_{z_0,z}} = \int_{P_{z_0,z}} + \sum_i \int_{\partial R_i} = \int_{P_{z_0,z}}$ pelo resultado do parágrafo anterior. Assim $F(z) = \int_{P_{z_0,z}} f(\xi)\, d\xi$ é uma função bem definida.

Mostra-se, como em (7.3), que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$ (note que $F(z_2) - F(z_1) = \int_{P_{z_1.z_2}} f(\xi)\, d\xi = \int_{[z_1,z_2]} f(\xi)\, d\xi$ se z_1,z_2 pertencem a uma bola aberta contida em Ω, pelo Lema de Goursat). Como f admite primitiva em Ω, segue que $\int_C f(\xi)\, d\xi = 0$ para toda curva fechada C em Ω. q.e.d.

14.3 Domínios multiplamente conexos. *Seja C_0 uma curva fechada simples (de classe $\mathcal{C}^1$ por partes) e sejam C_j, para $j = 1, \ldots, n$ uma coleção finita de curvas fechadas simples contidos no interior de C_0 tais que os interiores dos C_j não têm pontos em comum. Seja Ω a região interior a C_0 e exterior a todos os C_j, e seja $C = C_0 + C_1 + \ldots + C_n$ a fronteira de Ω orientada de modo que os pontos de Ω fiquem sempre à esquerda do percurso de C. Se f é uma função analítica sobre Ω e C, então*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Dem. Por meio de segmentos unindo C_0 a C_1, C_1 a C_2, e assim por iante até C_n e C_0, podemos decompor Ω numa união fini ta de domínios simplesmente conexos, aos quais aplicamos (14.2). q.e.d.

14.4 (*Exemplos*) (i) Se C é uma curva fechada simples de classe $\mathcal{C}^1$ por partes arbitrária, percorrida uma vez no sentido anti-horário, que contém a origem no seu interior, então $\int_C f(z)\,dz = \int_{\partial B(0,R)} f(z)\,dz = 2\pi i$ para $R > 0$ suficientemente pequeno.

(ii) Se f é uma função holomorfa no anel $R_1 < |z - z_0| < R_2$ então $\int_{\partial B(z_0,R)} f(z)\,dz$ é independente de $r \in (R_1, R_2)$.

14.5 Fórmula integral de Cauchy para um anel. *Seja f holomorfa no anel $\Omega : R_1 < |z - z_0| < R_2$ e fixemos um ponto $z \in \Omega$. Então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

para $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$ e $C_r = \partial B(z_0, r)$ (orientações no sentido anti-horário).

Dem. Definimos

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{se } \xi \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{se } \xi = z. \end{cases}$$

Então g é holomorfa em $\Omega \setminus \{z\}$ e contínua em Ω. Seja B uma bola aberta centrada em z e contida em Ω. Aplicamos (9.2) para deduzir que g é holomorfa em B, logo em z. Pelo Exemplo 14.4(ii)

$$\int_{C_{r_1}} g(\xi)\,d\xi = \int_{C_{r_2}} g(\xi)\,d\xi,$$

equação que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\int_{C_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \\ &= \quad f(z)\int_{C_{r_2}} \frac{1}{\xi - z}\,d\xi - f(z)\int_{C_{r_1}} \frac{1}{\xi - z}\,d\xi. \end{aligned}$$

Mas a primeira integral do membro direito é $2\pi i$ pela fórmula integral de Cauchy para um disco, e a segunda integral é 0, pelo teorema integral de Cauchy. q.e.d.

Ex. 14.1 Exibir um exemplo de domínio simplesmente conexo que não é estrelado.

Ex. 14.2 Sejam P e Q polinoômios tais que $\deg Q > \deg P + 1$. SEja C um círculo cujo interior contém todas as raízes de Q. Prove que

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0.$$