

10.a aula: 27set (resumo)

10.1 Derivadas de funções holomorfas Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e C um círculo contido em Ω . Para todo z_0 no interior de C , temos pela fórmula integral de Cauchy que

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Daqui vamos obter uma fórmula para $f'(z_0)$. Temos

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}.$$

A diferença entre esta integral e

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

é da forma

$$\Delta z \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2(z - z_0 - \Delta z)}.$$

Sejam M o valor máximo de $|f|$ sobre C , L o comprimento de C e d a distância mínima de C a z_0 . Sendo $|\Delta z| < d$, o valor absoluto da última expressão está acotado superiormente por

$$\frac{M \cdot L |\Delta z|}{d^2(d - |\Delta z|)},$$

que tende a zero com $\Delta z \rightarrow 0$. Consequentemente,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}.$$

10.2 Derivadas de ordem superior. Repetindo o tipo de argumento acima, obtemos que

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3},$$

e mais geralmente,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

10.3 Suponhamos que f é uma função holomorfa em um ponto z_0 . Isto quer dizer que f é derivável num conjunto aberto contendo z_0 . Tomando um círculo centrado em z_0 de raio suficientemente pequeno contido nesse aberto, podemos aplicar (10.2) para concluir que f admite derivadas de todas as ordens em z_0 . Escrevendo $f = u + iv$, concluímos que u e v são funções de classe C^∞ numa vizinhança de z_0 .

10.4 Teorema de Morera. *Seja Ω um domínio estrelado com centro z_0 . Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $\int_C f(z) dz = 0$ para toda curva fechada C em Ω . Então f é holomorfa em Ω .*

Dem. Por (8.2), f admite primitiva F em Ω , $F' = f$. Como F é holomorfa, segue de (10.3) que f também é holomorfa. q.e.d.

10.5 Desigualdade do valor médio. Nas hipóteses de (10.1),

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Segue que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta, \quad (1)$$

isto é, o valor de $|f|$ no centro do círculo de raio r não excede o valor médio ao longo do círculo.

10.6 Teorema do Módulo Máximo. *Se f é holomorfa num domínio limitado Ω e contínua no fecho $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, então o valor máximo de $|f|$ em $\bar{\Omega}$ só pode ser assumido num ponto da fronteira $\partial\Omega$, a não ser que f seja constante.*

Dem. Segue de (10.5). q.e.d.

10.7 Desigualdade de Cauchy. Nas hipóteses de (10.1), sendo M o valor máximo de $|f|$ sobre C e r o raio de C , temos:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

10.8 Teorema de Liouville. *Toda função inteira e limitada é constante.*

Dem. Seja f inteira com $|f| \leq M$ para uma constante $M > 0$. Por (10.7), temos

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

para todos $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Segue que f' é identicamente nula e assim f é constante. q.e.d.

10.9 Teorema Fundamental da Álgebra. *Todo polinômio complexo não-constante tem pelo menos uma raiz em \mathbb{C} .*

Dem. Suponhamos por absurdo que $P(z)$ é um polinômio que nunca se anula. Então $f(z) = 1/P(z)$ é uma função inteira. Como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$, verifica-se que f é limitada, logo, constante por (10.8) e P também é constante. q.e.d.

Ex. 10.1 Calcular as seguintes integrais onde C é a fronteira do quadrado cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, orientado no sentido anti-horário: (a) $\int_C \frac{e^{-z}}{z - \pi i/2} dz$; (b) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$; (c) $\int_C \frac{z}{2z+1} dz$; (d) $\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz$ ($|x_0| < 2$); (e) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$.

Ex. 10.2 Calcular: (a) $\int_C \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2} dz$, onde C é o círculo $|z| = 3$ orientado no sentido anti-horário; (b) $\int_C \frac{z^2}{(2z-i)^3} dz$, onde C é o círculo $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horário; (c) $\int_C \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2} dz$, onde C é o círculo $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horário.

Ex. 10.3 Mostre que se f é inteira e $|f(z)| < |z|^n$ para algum inteiro positivo n e todo $|z|$ suficientemente grande, então f é um polinômio.