

### 1.a aula: 2ago (resumo)

**1.1** A equação  $x^2 + 1 = 0$  não tem solução se  $x$  é um número real. Assim estendemos  $\mathbf{R}$  a um conjunto maior da seguinte forma. Números complexos são expressões da forma  $a + ib$  onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i$  é a *unidade imaginária* e satisfaz  $i^2 = -1$ . Podem ser adicionados e multiplicados:

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + i^2bd + iad + ibc \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Essas operações satisfazem nove propriedades e tornam o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos um *corpo*.

**1.2** O *conjugado* de  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  é  $\bar{z} = a - ib$ . Note que  $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ . Então se  $z \neq 0$ , temos  $a^2 + b^2 > 0$  e o *inverso* de  $z$  é dado por  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$ . Temos

$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = z\bar{w}, \\ \bar{\bar{z}} &= z, \quad \Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.\end{aligned}$$

**1.3** Identificando  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$ , a adição de números complexos coincide com a adição de vetores. Temos também

$$|z| = z\bar{z}, \quad \langle z, w \rangle = \Re\{z\bar{w}\}.$$

Segue que

$$|zw| = |z||w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

De

$$\langle z, w \rangle^2 + \langle z, iw \rangle^2 = |z|^2|w|^2$$

deduzimos a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle z, w \rangle| \leq |z||w|. \tag{1}$$

O ângulo  $\theta$  entre  $z, w \neq 0$  satisfaz

$$\cos \theta = \frac{\langle z, w \rangle}{|z||w|}.$$

Calculando

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\langle z, w \rangle \tag{2}$$

e notando que  $\theta + \varphi = \pi$  onde  $\varphi$  é a medida do ângulo oposto ao lado  $\overline{0z + w}$  no triângulo de vértices  $0, z, z + w$ , vem a *Lei dos Cossenos*

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2|z||w| \cos \varphi.$$

Finalmente, (1) e (2) dão a *Desigualdade Triangular*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

**1.4** Usando *coordenadas polares* em  $\mathbb{R}^2$ , podemos escrever

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Se  $w = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , a multiplicação fica

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi) \\ &= rs(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)). \end{aligned}$$

Em particular,

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

Por exemplo, as raízes quadradas de  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  podem ser calculadas desta forma. A equação  $w^2 = z$  tem as soluções

$$w = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

e

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{r} \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{2} + \pi \right) \right) \\ &= -\sqrt{r} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

**Ex. 1.1** Calcular as partes reais e imaginárias de

$$(1 + 2i)^3, \left( \frac{2 + i}{3 - 2i} \right)^2, \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^2.$$

**Ex. 1.2** Quais são as raízes quadradas de  $i$ ?

**Ex. 1.3** Prove que para  $\alpha \neq \beta$  temos

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| = 1$$

se  $|\alpha| = 1$  ou  $|\beta| = 1$ .

**Ex. 1.4** Sendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , mostre que  $|z - \alpha| + |z + \alpha| = 2|\beta|$  é a equação de uma elipse. Identifique os focos e semi-eixos.

**Ex. 1.5** Sendo  $z, w \in \mathbb{C}$  dois vértices de um quadrado, determine os outros dois vértices em todos os casos possíveis.

**Ex. 1.6** Expressar  $\sin 5\theta$  em função de  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ .

**Ex. 1.7** Qual são as condições sobre  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  para que a equação  $\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$  represente uma reta?