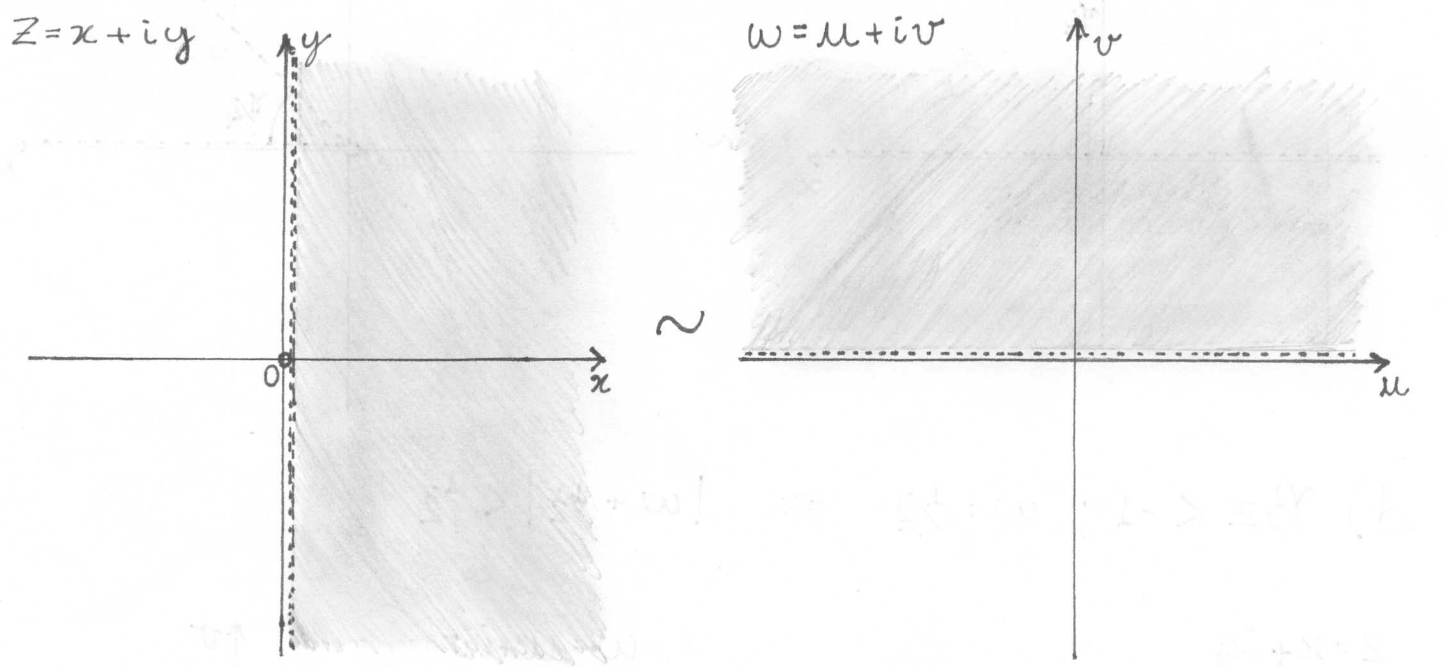
MAT 0220 - CÁLCULO IV 06.10.2010

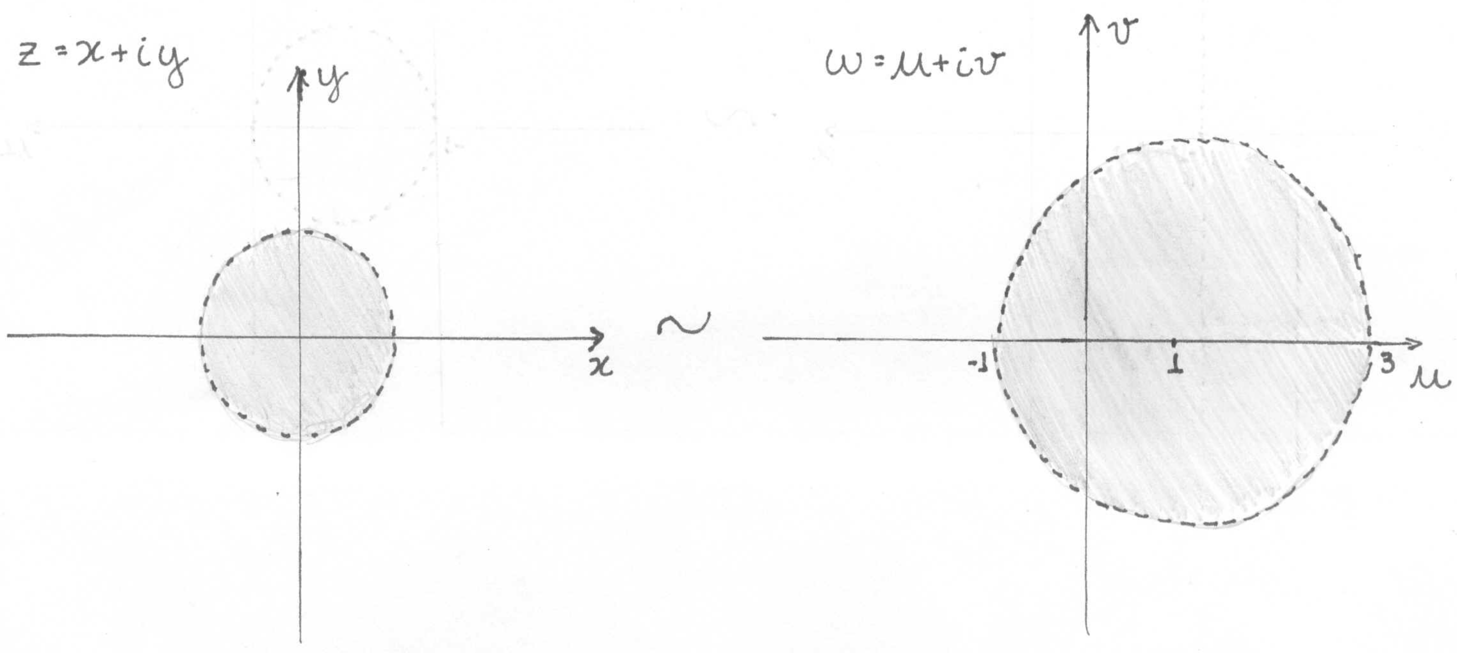
Lista 4

1)

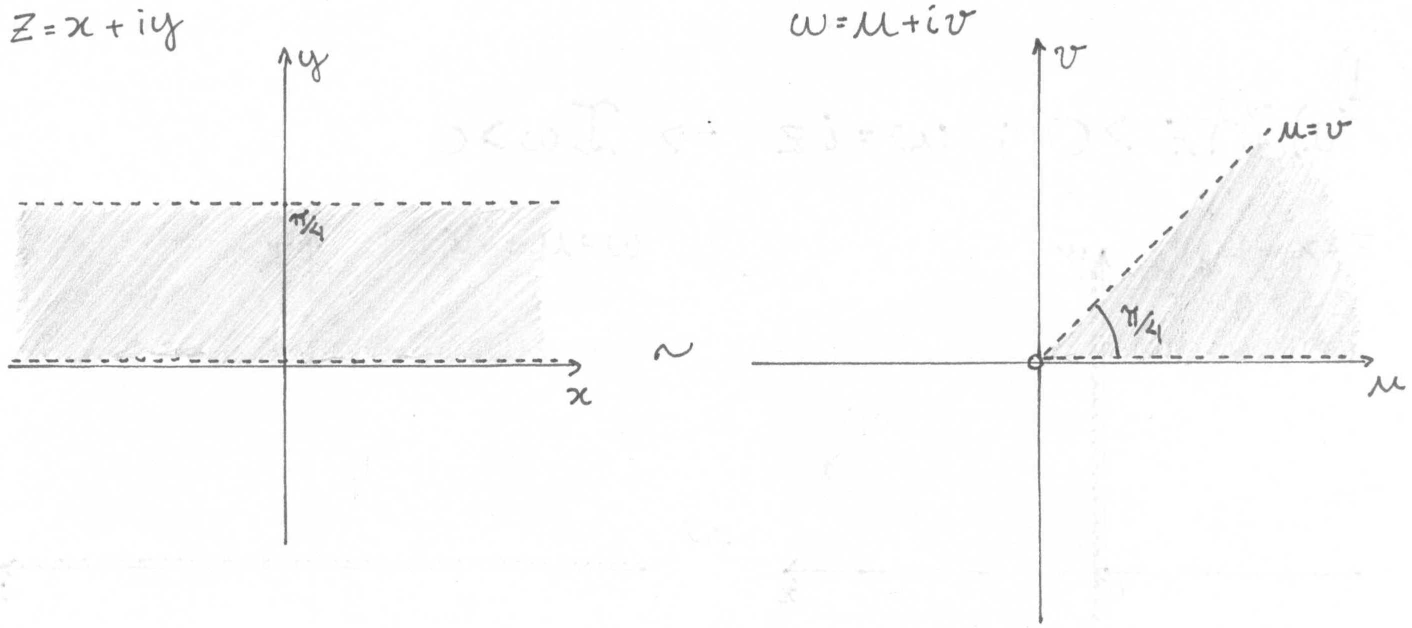
a) $\Re z > 0$; $\omega = iz \Rightarrow \Im \omega > 0$



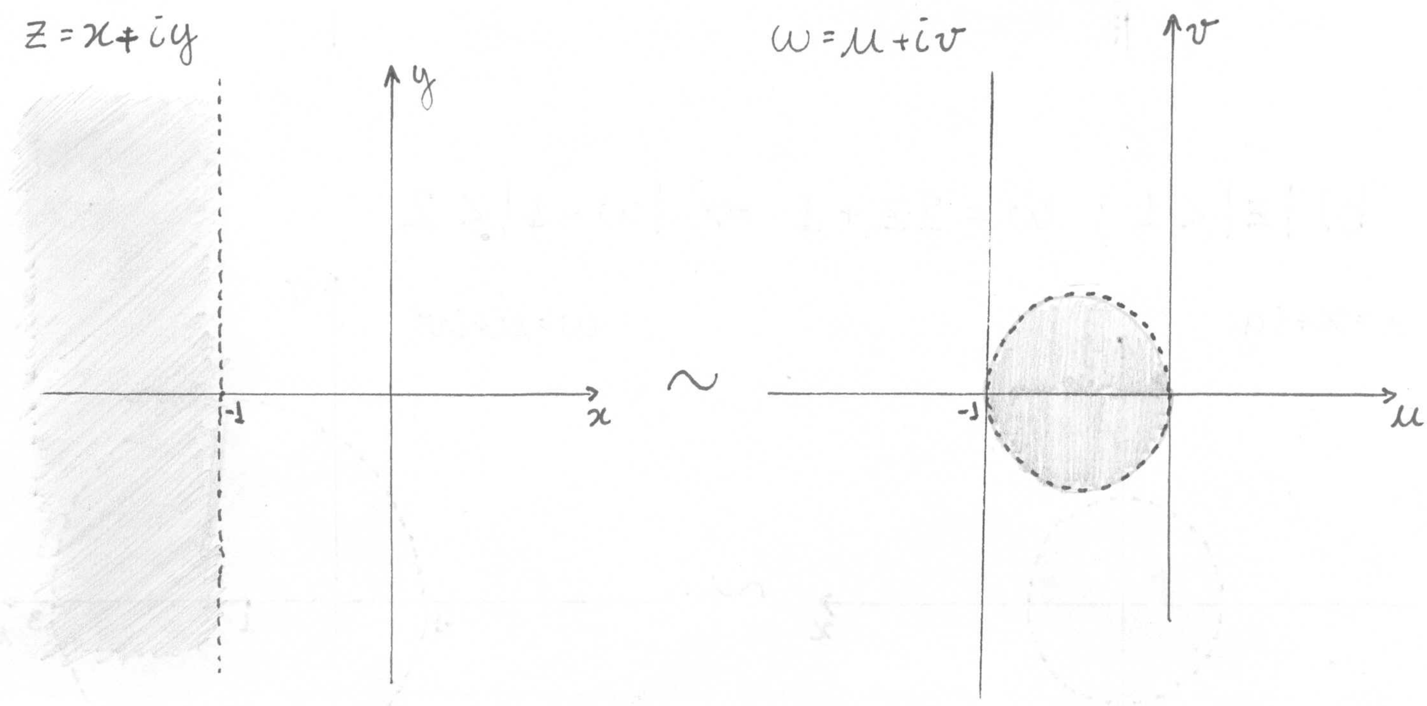
b) $|z| < 1$; $\omega = 2z + 1 \Rightarrow |\omega - 1| < 2$



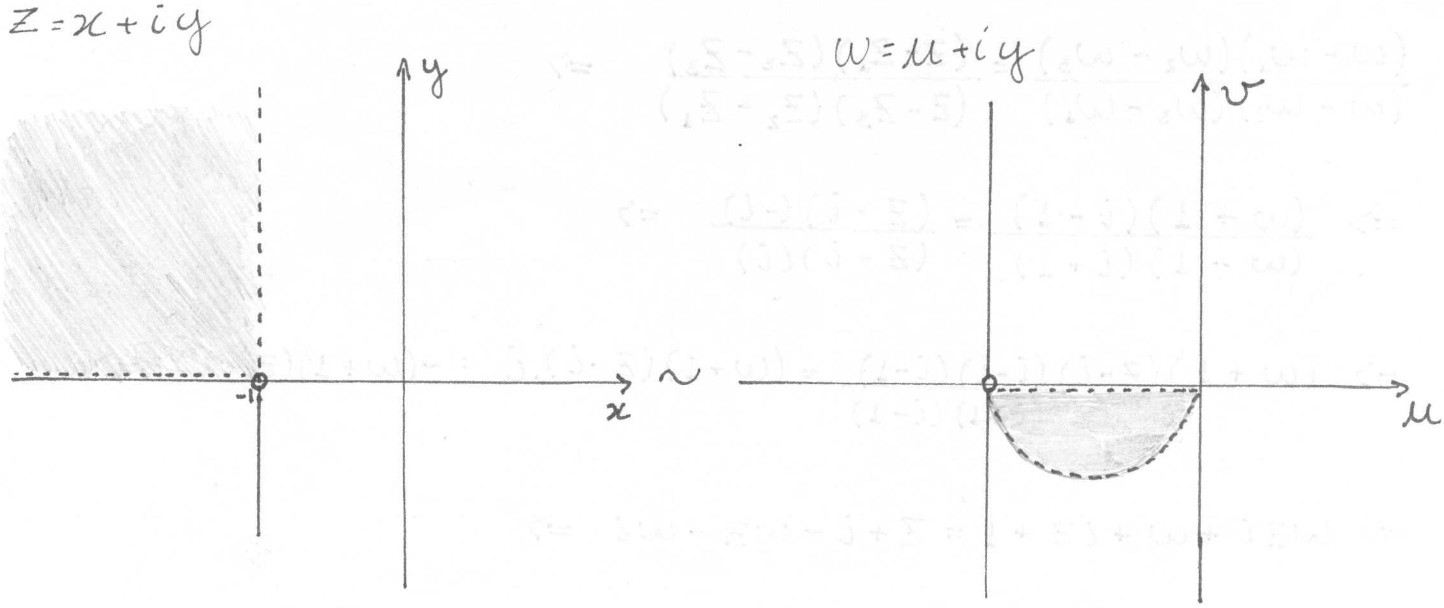
c) $0 < \Im z < \pi/4$; $\omega = e^{z} \Rightarrow e^{x}(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y)$; $0 < y < \pi/4$



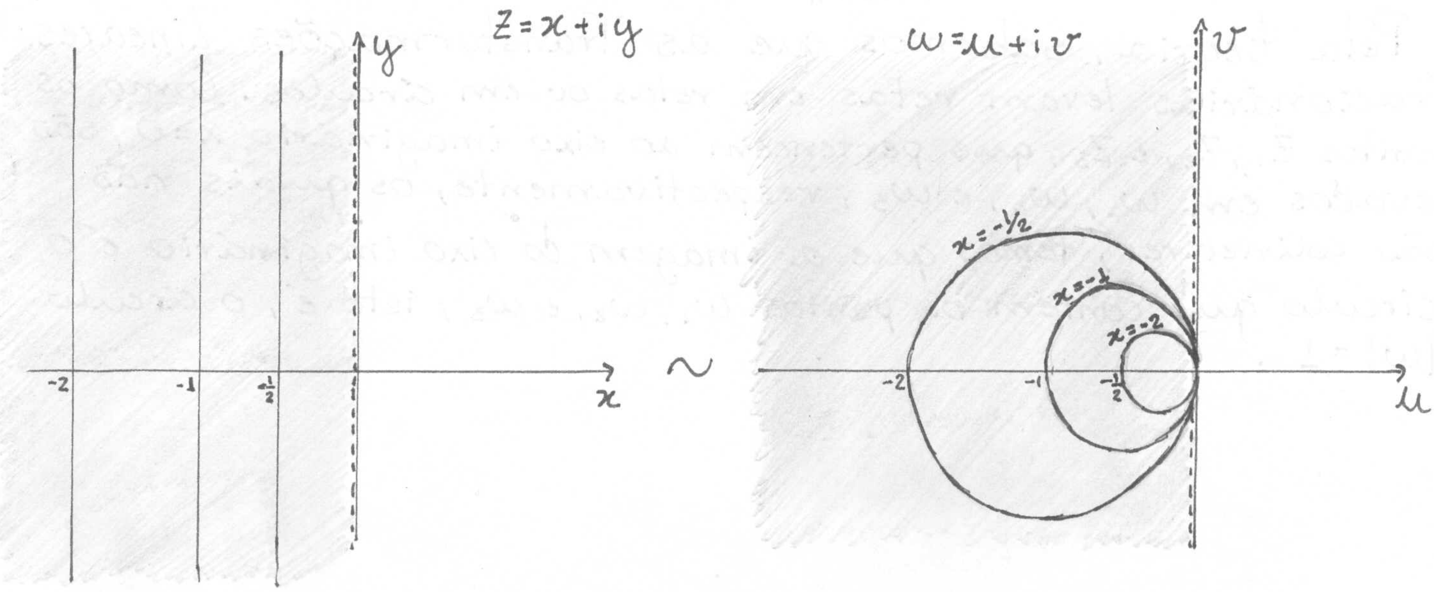
d) $\Re z < -1$; $\omega = 1/z \Rightarrow |\omega + 1/2| < 1/2$



e) $\Re z < -1$ e $\Im z > 0$; $w = 1/z \Rightarrow |w + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, $\Im w < 0$



f) $\Re z < 0$; $w = 1/z \Rightarrow \Re w < 0$



2) $Z_1 = -i$; $Z_2 = 0$; $Z_3 = i$ e $w_1 = -1$; $w_2 = i$; $w_3 = 1$

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_3-w_1)} = \frac{(Z-Z_1)(Z_2-Z_3)}{(Z-Z_3)(Z_2-Z_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(w+1)(i-1)}{(w-1)(i+1)} = \frac{(Z+i)(-i)}{(Z-i)(i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (w+1)(Z-i)\frac{(i-1)(i-1)}{(i+1)(i-1)} = (w+1)(Z-i).i = -(w-1)(Z+i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow wZi + w + iZ + 1 = Z + i - wZ - wi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow wZi + w + wZ + wi = Z + i - iZ - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w[Z(1+i)+(1+i)] = Z(1-i)+(-1+i) \Rightarrow \boxed{w = \frac{(1-i)Z + (-1+i)}{(1+i)Z + (1+i)}}$$

—— // ——

Pela teoria, sabemos que as Transformações Lineares Fracionárias levam retas em retas ou em círculos. Como os pontos Z_1, Z_2, e Z_3, que pertencem ao eixo imaginário $x=0$, são levados em w_1, w_2, e w_3, respectivamente, os quais não são colineares, temos que a imagem do eixo imaginário é o círculo que contém os pontos w_1, w_2, e w_3, isto é, o círculo $|w| = 1$.