MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 7 – 25/05/2011

Prof. Claudio Gorodski

1. Eliminar os parâmetros u e v para obter uma equação $F(x, y, z) = 0$, e calcular o produto vetorial $\partial\vec{r}/\partial u \times \partial\vec{r}/\partial v$:

a. $\vec{r}(u, v) = (x_0 + a_1u + b_1v)\,\vec{i} + (y_0 + a_2u + b_2v)\,\vec{j} + (z_0 + a_3u + b_3v)\,\vec{k}$ (plano).

b. $\vec{r}(u, v) = au\cos v\,\vec{i} + bu\sin v\,\vec{j} + u^2\,\vec{k}$ (parabolóide elíptico).

c. $\vec{r}(u, v) = a\sin u\cos v\,\vec{i} + b\sin u\sin v\,\vec{j} + c\cos u\,\vec{k}$ (elipsóide).

d. $\vec{r}(u, v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + f(u)\,\vec{k}$, onde f é uma função continuamente derivável (superfície de revolução).

e. $\vec{r}(u, v) = (a + b\cos u)\sin v\,\vec{i} + (a + b\cos u)\cos v\,\vec{j} + b\sin u\,\vec{k}$, onde $0 < b < a$ (toro). Qual o significado geométrico dos números a e b?

2. Calcular o módulo de $\partial\vec{r}/\partial u \times \partial\vec{r}/\partial v$:

a. $\vec{r}(u, v) = a\sin u\cosh v\,\vec{i} + b\cos u\cosh v\,\vec{j} + c\sinh v\,\vec{k}$

b. $\vec{r}(u, v) = (u + v)\,\vec{i} + (u - v)\,\vec{j} + 4v^2\,\vec{k}$.

3. Calcular a área da superfície indicada:

a. A porção do plano $x + y + z = a$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$.

b. A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ay$, onde $a > 0$.

c. A porção da superfície $z^2 = 2xy$ cortada pelos planos $x = 2$ e $y = 1$, e que está acima do primeiro quadrante do plano xy.

d. A porção da superfície cônica $x^2 + y^2 = z^2$ que está acima do plano xy e no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$.

e. A porção do parabolóide $x^2 + z^2 = 2ay$ que é delimitada pelo plano $y = a$.

4. Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto. A esfera está cortada por dois planos paralelos perpendiculares ao eixo do cilindro. Mostrar que as regiões da esfera e do cilindro que estão entre os dois planos têm a mesma área.

5. Seja S o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e seja $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior de S. Calcular a integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS$.

6. Seja S a superfície plana cuja fronteira é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, e seja $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Seja $\vec{n}$ a normal unitária tendo a

componente z não-negativa. Calcular a integral de superfície $\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ usando uma representação paramétrica de S.

7. Se S é a superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = a^2$, calcular o valor da integral de superfície

$$\int\int_S xz\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + x^2\, dx \wedge dy,$$

onde S está orientada pela normal exterior.

8. O cilindro $x^2+y^2 = 2x$ corta a superfície S da metade superior do cone $x^2+y^2 = z^2$. Calcular

$$\int\int_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dS.$$

9. Calcular o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} - (2x+y)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ através do hemisfério $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientado na direção da normal unitária exterior $\vec{n}$.

10. Resolver o exercício anterior acrescentando a S a base do hemisfério orientada por $-\vec{k}$.

11. Seja S a porção do plano $x+y+z = t$ delimitada pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$. Seja $\varphi(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$ se (x,y,z) está no interior da esfera e 0 caso contrário. Mostre que

$$\int\int_S \varphi(x,y,z)\, dS = \begin{cases} \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2 & \text{se } |t| \leq \sqrt{3} \\ 0 & \text{se } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$