MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 6 – 09/05/2011

Prof. Claudio Gorodski

1. Usar o teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_C y^2\,dx + x\,dy$ (sentido anti-horário) onde:

a. C é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.

b. C é o quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

c. C é o quadrado de vértices $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$.

d. C é o círculo de raio 2 e centro na origem.

e. C está parametrizada por $\gamma(t) = 2\cos^3 t\,\vec{i} + 2\sin^3 t\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Sendo $P(x,y) = xe^{-y^2}$ e $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + 1/(x^2+y^2)$, calcular a integral de linha $\int P\,dx + Q\,dy$ ao longo da fronteira do quadrado de lado $2a$ determinado pelas desigualdades $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$.

3. Calcular a integral de linha $\int_C P\,dx + Q\,dy$ onde

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

e C é uma curva fechada simples suave em $\mathbf{R}^2$ que não contém $(0,0)$ no seu interior.

4. Esboçar um desenho da região S e expressar a integral $\int\int_S f(x,y)\,dxdy$ como uma integral iterada em coordenadas polares:

a. $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} \qquad (a > 0)$

b. $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$

c. $S = \{(x,y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} \qquad (0 < a < b)$

d. $S = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1\}$

e. $S = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}$

5. Transformar a integral para coordenadas polares e resolvê-la ($a > 0$):

a. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

b. $\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

c. $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-1/2}\,dy\,dx$

d. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dx\, dy$

6. Efetuar uma mudança de coordenadas conveniente para calcular a integral dupla

$$\int\int_S (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dxdy$$

onde S é o paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

7. Considere a transformação definida pelas equações

$$x = u + v, \qquad y = v - u^2.$$

a. Calcular o determinante Jacobiano $J(u, v)$.

b. Um triângulo T no plano uv tem vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Esboçar um desenho de sua imagem S no plano xy.

c. Calcular a área de S por meio de uma integral dupla sobre S e também por meio de uma integral dupla sobre T.

d. Calcular $\int\int_S (x-y+1)^{-2}\, dxdy$.

8. Considere a transformação definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv.$$

a. Calcular o determinante Jacobiano $J(u, v)$.

b. Um retângulo T no plano uv tem vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(1,3)$. Esboçar um desenho de sua imagem S no plano xy.

c. Calcular $\int\int_D xy\, dxdy$, onde $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Mostre que

$$\int\int_S f(x+y)\, dxdy = \int_{-1}^{1} f(u)\, du,$$

onde $S = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

10. Calcular as integrais triplas:

a. $\int\int\int_S (1+x+y+z)^{-3}\, dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.

b. $\int\int\int_S xyz\, dxdydz$, onde $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

c. $\int\int\int_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

d. $\int\int\int_S \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, onde S é o o sólido formado pela metade superior do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 1$.

11. Mudar a ordem de integração de modo que a primeira integração seja com respeito a y.

a. $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right)dx.$

b. $\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right)dx.$

12. Calcular o valor das integrais triplas mudando para coordenadas cilíndricas:

a. $\int\int\int_S (x^2+y^2)\,dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pela superfície $x^2+y^2=2z$ e pelo plano $z=2$.

b. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pelos planos coordenados, a superfície $z=x^2+y^2$ e o plano $x+y=1$.

13. Calcular o valor das integrais triplas mudando para coordenadas esféricas:

a. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é a esfera sólida de raio a e centro na origem.

b. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é o sólido delimitado por duas esferas concêntricas de raios a e b, onde $0<a<b$, cujo centro é a origem.

c. $\int\int\int_S [(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-1/2}\,dxdydz$, onde S é a esfera sólida de raio R e centro na origem, e (a,b,c) é um ponto no exterior da esfera.

14. Calcular o volume do sólidos delimitados pelas superfícies indicadas:

a. A esfera $x^2+y^2+z^2=5$ por cima, o parabolóide $x^2+y^2=4z$ por baixo.

b. O plano $z=0$, o cilindro $x^2+y^2=2x$ e o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

15. Um cone circular reto sólido homogêneo tem altura h. Mostre que a distância de seu centróide à base é $h/4$.

16. Um cone circular reto sólido tem altura h e densidade proporcional à distância à base. Calcular o centro de massa.