MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 2 – 2015

Prof. Claudio Gorodski

`É permitido assumir a diferenciabilidade de todas as funções sob consideração.`

1. Determinar os pontos de máximo, mínimo e de sela das funções indicadas, se possível:

a. $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

b. $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$

c. $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

d. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$

e. $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

2. Sejam $a_1, \ldots, a_m$ uma coleção de $m \geq 2$ pontos mutuamente distintos em $\mathbf{R}^n$. Defina

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} ||x - a_i||^2$$

para $x \in \mathbf{R}^n$. Prove que f tem um ponto de mínimo em $a = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ (o *centróide*).

3. Sejam a, $b > 0$ fixados.

a. Determinar os valores extremais de $x/a + y/b$ sujeito à condição $x^2 + y^2 = 1$.

b. Determinar os valores extremais de $x^2 + y^2$ sujeito à condição $x/a + y/b = 1$.

Em cada caso, interprete geometricamente.

4. Determinar os valores extremais de $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. Determinar os pontos da superfície $z^2 - xy = 1$ que estão mais próximos da origem.

6. Determinar os pontos da curva de intersecção das superfícies

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

que estão mais próximos da origem.

7. Se a, b, $c > 0$ são dados, determinar o valor máximo de $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ sujeito à condição $x + y + z = 1$.

8. Calcular a matriz diferencial das transformações $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ indicadas:

a. $u = ax + by$, $v = cx + dy$

b. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan y/x$

c. $u = x^2$, $v = y^2$

d. $u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$, $v = \arctan y/x$

e. $u = xy^2$, $v = x^2 y$

f. $u = x^3 - y$, $v = x + y^3$

9. Para cada função do exercício anterior, determinar os pontos em que a função admite uma inversa local diferenciável.

10. Calcular $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ por cálculo direto e pela regra da cadeia:

a. $\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \frac{1}{2}\log(\xi^2 + \eta^2) \\ v & = & \arctan \eta/\xi \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{lcl} \xi & = & e^x \cos y \\ \eta & = & e^x \sin y \end{array} \right.$

b. $\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \xi^2 - \eta^2 \\ v & = & 2\xi\eta \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{lcl} \xi & = & x \cos y \\ \eta & = & x \sin y \end{array} \right.$

c. $\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & e^{\xi} \cos \eta \\ v & = & e^{\xi} \sin \eta \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{lcl} \xi & = & x/(x^2 + y^2) \\ \eta & = & -y/(x^2 + y^2) \end{array} \right.$

11. (Coordenadas esféricas em $\mathbf{R}^3$) Seja $f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definda por

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \cos\theta \sin\varphi \\ y & = & r \sin\theta \sin\varphi \\ z & = & r \cos\varphi \end{array} \right.$$

onde Ω é o aberto

$$r > 0,\ -\pi < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < \pi.$$

a. Calcular a matriz Jacobiana de f num ponto (r, θ, φ) de Ω.

b. Calcular o determinante da matriz Jacobiana do item (a).

c. Seja $u = g(x, y, z)$, onde $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Exprimir as derivadas parciais de u em relação a r, θ, φ em termos das derivadas parciais de u em relação a x, y, z

d. Exprimir as derivadas parciais de u em relação a x, y, z em termos das derivadas parciais de u em relação a r, θ, φ.

e. Calcular $||\nabla g||^2$ em termos das derivadas parciais de u em relação a r, θ, φ.

12. Sejam $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definidas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x))$$

e

$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2)).$$

a. Calcular as matrizes Jacobianas $Jf(x, y)$ e $Jg(u, v, w)$.

b. Calcular a composta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$.

c. Calcular a matriz Jacobiana $Jh(1, -1, 1)$.